

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени В. Н. КАРАЗИНА

В. А. Шкловский, А. В. Добровольский

**ПИННИНГ И ДИНАМИКА ВИХРЕЙ В
СВЕРХПРОВОДНИКАХ**

Учебное пособие

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины

Харьков – 2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени В. Н. КАРАЗИНА

В. А. Шкловский, А. В. Добровольский

**ПИННИНГ И ДИНАМИКА ВИХРЕЙ В
СВЕРХПРОВОДНИКАХ**

Учебное пособие

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины

Харьков – 2014

УДК 538.945

ББК 22.36

Ш66

Рецензенты:

Касаткин А. Л. – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник отдела сверхпроводимости Института металлوفизики имени Г. В. Курдюмова НАН Украины;

Микитик Г. П. – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник отдела теоретической физики Физико-технического института низких температур имени Б. И. Веркина НАН Украины;

Чабаненко В. В. – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом сверхпроводимости и туннельной спектроскопии Донецкого физико-технического института имени А. А. Галкина НАН Украины.

*Рекомендовано Министерством образования и науки Украины
как учебное пособие для студентов высших учебных заведений
(письмо № х/хх-ххх от хх.хх.2014 г.)*

Шкловский В. А.

Ш66 Пиннинг и динамика вихрей в сверхпроводниках : учебное пособие / В. А. Шкловский, А. В. Добровольский. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2014. – 120 с.

ISBN xxx-xxx-xxx-x

Излагаются как традиционные, так и новые аспекты физики пиннинга и динамики вихрей в сверхпроводниках второго рода. Обсуждаются вязкое течение магнитного потока и эффект Холла в отсутствие пиннинга, микроскопический смысл коэффициентов диссипативной и холловской вязкости, анизотропия пиннинга, направленное движение вихрей в присутствии однонаправленных плоских дефектов. Детально рассматриваются сценарии коллективного (теория Ларкина-Овчинникова) и сильного (результаты Лабуша) пиннинга вихрей на хаотически расположенных точечных дефектах, а также интерпретация коллективного пиннинга в терминах картины сильного пиннинга. Обсуждается реакция сверхпроводника на высокочастотное электромагнитное поле.

УДК 538.945

ББК 22.36

ISBN xxx-xxx-xxx-x

©Харьковский национальный университет
имени В. Н. Каразина, 2014

©Шкловский В. А., Добровольский А. В., 2014

Содержание

Перечень иллюстраций	7
Список сокращений и терминов	8
Предисловие	9
1 Введение	12
1.1 Основные экспериментальные факты	12
1.2 Двухжидкостная модель и длина когерентности	15
1.3 Уравнение Лондонов и глубина проникновения поля	17
1.4 Термодинамические соотношения в магнитном поле	19
1.5 Поверхностная энергия на границе раздела NS фаз	20
1.6 Сверхпроводники первого и второго рода	21
2 Вихрь и его свойства	24
2.1 Энергия и магнитный момент вихря	24
2.2 Магнитное поле вихря	26
2.3 Взаимодействие вихрей между собой	27
2.4 Взаимодействие вихря с поверхностью сверхпроводника	29
2.5 Динамические свойства вихрей	31

3	Тензор электропроводности в магнитном поле	34
3.1	Уравнение движения вихря с учетом эффекта Холла	34
3.2	Продольное и холловское напряжения. Угол Холла	35
3.3	Вычисление тензора электропроводности в модели Друде	37
3.4	Вычисление α_H и η . Их анализ в "чистом" и "грязном" пределе	39
4	Пиннинг вихрей в сверхпроводниках	41
4.1	Понятия пиннинга вихрей и критического тока	41
4.2	Физическая природа пиннинга	42
4.3	Влияние пиннинга на ВАХ сверхпроводника	43
4.4	Вычисление ВАХ при нулевой температуре	44
4.5	Влияние температуры на ВАХ. Крип вихрей	46
5	Эффект Холла и направленное движение вихрей	48
5.1	Влияние плоских дефектов на резистивные свойства ВТСП	48
5.2	Вычисление средней скорости вихря	49
5.3	Вычисление ВАХ двумерной динамики вихрей	52
5.4	Анализ резистивных откликов 2D динамики вихрей	55
6	Сильный пиннинг на хаотически расположенных дефектах	60
6.1	Два сценария реализации пиннинга на случайных дефектах	60
6.2	Зависимость средней силы пиннинга от координаты вихря	61
6.3	Многозначные режимы и скачки координат и энергии вихря	66
6.4	Вычисление j_c с помощью теории фазовых переходов Ландау	68
7	Коллективный пиннинг	73
7.1	Основная идея подхода и оценка j_c при нулевой температуре	73
7.2	Крип одиночного вихря для $j \ll j_c$ и конечной температуры	76
7.3	Упругие модули вихревой решетки	78

7.4	Критический ток в 3D случае (теория Ларкина-Овчинникова)	80
7.5	Коллективный пиннинг вихрей для 2D случая	82
7.6	Заключительные замечания о сильном и коллективном пиннинге	82
8	Равновесная анизотропия пиннинга вихрей на двойниках в YBCO	86
8.1	Пиннинг вихрей на двойниках: эксперименты аргоннской группы	86
8.2	Критический угол при пиннинге вихрей на двойниках	88
8.3	Угловая зависимость $j_c(\alpha)$ при пиннинге на двойниках	90
8.4	Крип вихрей при пиннинге вихрей на двойниках	93
9	Реакция сверхпроводника на переменное электромагнитное поле	96
9.1	Комплексная проводимость сверхпроводника	96
9.2	Нормальный скин-эффект в сверхпроводнике	99
9.3	Поверхностный импеданс металла	100
9.4	Поверхностный импеданс сверхпроводника	104
10	Динамика запиннигованных вихрей на переменном токе	109
10.1	Поглощение мощности на сверхвысоких частотах	110
10.2	Влияние постоянного тока на частоту депиннинга	112
10.3	Восстановление потенциала пиннинга	114
	Алфавитный указатель	116
	Рекомендуемая литература	118

Перечень иллюстраций

1.1	Зависимости $\rho(T)$ и $H_c(T)$ сверхпроводника	13
1.2	Зависимости $C_e(T)$ и $F(T)$ сверхпроводника	14
1.3	Проникновение магнитного поля вглубь сверхпроводника	18
1.4	Поверхностная энергия на границе раздела NS фаз	20
1.5	Магнитная индукция и магнитный момент сверхпроводника	21
1.6	Фазовая диаграмма состояния сверхпроводников второго рода	22
2.1	Структура одиночного вихря	25
2.2	Схема эффекта Бернулли в гидродинамике	28
2.3	Взаимодействие вихря с поверхностью сверхпроводника	29
2.4	Пространственная зависимость потенциала Гиббса вихря	30
3.1	Угол Холла и холловская вольт-амперная характеристика	36
4.1	ВАХ образца без пиннинга и с пиннингом	43
4.2	Пилообразный потенциал пиннинга в присутствии тока	44
4.3	Токовая зависимости v_p -функции и продольная ВАХ	46
5.1	Система координат и пилообразный потенциал пиннинга	50
5.2	Токовые зависимости v^\pm -функций для ряда значений угла α	54
5.3	Токовые зависимости четных компонент $\rho_{\parallel, \perp}^+$ для ряда углов α	55
5.4	Угловая и токовая зависимости угла гайдинга	57

5.5	Токовые зависимости нечетных компонент $\rho_{\parallel,\perp}^-$ для ряда углов α	58
6.1	Искривление вихрей в присутствии точечного центра пиннинга	62
6.2	Анализ силы пиннинга как функции координаты вихря	64
6.3	Зависимости $e_{pin}(u x)$ внутри интервалов многозначности	67
6.4	Устойчивые минимумы $e_m(\varphi)$ при $\tau > 0$ и $\tau < 0$	70
6.5	Гистерезис φ при циклировании по h	71
7.1	Удлинение и энергия деформированного вихря	75
7.2	Зависимость $\delta F(L)$ и эффективный потенциал пиннинга	79
7.3	Полевая зависимость упругих модулей вихревой решетки	80
8.1	Температурная и угловая зависимость сопротивления YBCO	87
8.2	Равновесная конфигурация вихревой нити на двойниках	89
8.3	Резистивные переходы монокристалла YBCO	91
8.4	Вольт-угловые характеристики монокристалла YBCO	94
9.1	Геометрия задачи о падении ЭМ волны на поверхность металла	101
9.2	Отражение электромагнитной волны от поверхности металла	104
9.3	Температурные зависимости компонент импеданса и проводимости	106
9.4	Эквивалентная схема токов и проводимости сверхпроводника	107
10.1	Частотные зависимости реальной и мнимой частей импеданса	111
10.2	Модификация потенциала пиннинга постоянным током	112

Список сокращений и терминов

2D	two-dimensional, двумерный
3D	three-dimensional, трехмерный
GR	Джиттлемана-Розенблюма (модель)
FF	flux-flow (regime), режим течения потока
N	normal, нормальный
S	superconducting, сверхпроводящий
TAFF	thermally activated flux flow (regime), режим термоактивированного течения потока
TB	twin boundary, граница двойника
YBCO	$\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ (высокотемпературный сверхпроводник)
CP	collective pinning, коллективный пиннинг
IP	intrinsic pinning, собственный пиннинг
SP	strong pinning, сильный пиннинг
guiding	гайдинг, направленное движение вихрей
slipping	слиппинг, движение вихрей поперек протяженных дефектов
БКШ	Бардина-Купера-Шриффера (теория)
ВАХ	вольт-амперная характеристика
ВР	вихревая решетка
ВТСП	высокотемпературные сверхпроводники
ППП	периодический потенциал пиннинга
СВЧ	сверхвысокие частоты
ЦП	центр пиннинга
ЭМ	электромагнитный

Предисловие

Практически до открытия высокотемпературной сверхпроводимости (ВТСП) в конце 1986 г. казалось, что теория пиннинга вихрей в сверхпроводниках второго рода в основном завершена и ее последующее развитие будет связано лишь с некоторым уточнением ранее сложившихся представлений. Однако последовавшее затем бурное развитие экспериментальных и теоретических работ по ВТСП показало, что вопросы пиннинга и динамики вихрей в новых слоистых сверхпроводниках в силу определенной специфики последних (малая длина когерентности в сочетании с большим числом вакансий кислорода и существенной ролью термических флуктуаций на фоне сильной структурной анизотропии) привели к необходимости изучения целого ряда новых явлений в физике вихревой материи. Не претендуя, однако, в этих лекциях на подробное обсуждение большинства из этих достижений, мы рассмотрим ниже как традиционные, так и ряд новых аспектов физики пиннинга и динамики вихрей в сверхпроводниках второго рода, активно разрабатывавшихся два последних десятилетия различными исследователями (в том числе, и авторами данного пособия).

Если обратиться теперь к прикладному аспекту использования ВТСП, то следует отметить двойственную (и противоречивую по результатам) роль значительного повышения их критической температуры T_c (до 140 К у ртутных пленок). С одной стороны, повышение рабочих температур образцов из ВТСП значительно снижает затраты на их охлаждение, а с другой стороны, инициирует появление термических флуктуаций, ведущих к интенсивному температурному депиннингу вихрей (отсутствующему в низкотемпературных сверхпроводниках). Термические флуктуации существенно уменьшают критический ток (что нежелательно в сильноточных применениях) и увеличивают уровень тепловых шумов (что ухудшает работу слаботочных “джозефсоновских” приборов).

Следует также отметить, что за последние годы развитие фотолитографических (электронно-лучевая литография) и безмасковых (травление и осаждение материала с помощью фокусированных пучков частиц) методов обработки поверхностей сделало возможным создание преопределенных ландшафтов пиннинга с нанометровым разрешением. В свою очередь, это поместило изучение динамики вихрей в наноструктурированных сверхпроводниках (абрикосовскую флюксонику – быстро развивающуюся область на стыке сверхпроводимости и нанотехнологий) в фокус современных исследований. Именно поэтому вопросы пиннинга и динамики вихрей как в ВТСП, так и в “холодных” сверхпроводниках являются актуальными, что и определяет чтение этого курса лекций на кафедре физики низких температур физического факультета ХНУ имени В. Н. Каразина.

Переходя к краткому обзору содержания пособия, отметим, что в первых двух лекциях сжато изложен ряд традиционных сведений по физике сверхпроводимости [1–3]. В третьей лекции мы переходим к изучению феноменологического подхода к описанию динамики вихрей в образце с транспортным током. Приводится расчет продольного и поперечного (холловского) магнитосопротивления в поперечном магнитном поле в терминах коэффициентов диссипативной и холловской вязкости (с выяснением микроскопического смысла этих коэффициентов).

В четвертой и последующих лекциях представлены различные аспекты пиннинга и динамики вихрей в сверхпроводниках с плоскими и точечными дефектами. В лекции 4 обсуждаются традиционные представления о пиннинге, крипе и критическом токе [1–3], и приведен анализ простейшей модели пиннинга вихрей, позволяющей получить вольт-амперную характеристику (ВАХ) сверхпроводника. В пятой лекции подробно обсуждается простейшая модель двумерной динамики вихрей при их пиннинге на однонаправленных плоских дефектах (например, двойниках). В рамках этой модели анализируется Холл-эффект и направленное движение вихрей (guiding), а также их взаимовлияние, т. е. вопросы, активно исследовавшиеся авторами этого пособия. В следующих двух лекциях изложены сложившиеся к настоящему времени основные представления о пиннинге вихрей на хаотически расположенных точечных дефектах [4–8]. В шестой лекции рассмотрена задача о сильном пиннинге на точечном дефекте (результаты Лабуша) в подходе, обсуждавшемся недавно (2004 г.) в текущей литературе [8], а в седьмой лекции рассмотрены основные представления о коллективном пиннинге вихрей, развитые А. И. Ларкиным и его школой [4–7].

В восьмой лекции обсуждаются резистивные измерения анизотропии пиннинга на однонаправленных двойниках в YBCO в геометрии, когда внешнее магнитное поле и вихри лежат в плоскости слоев и измеряется угловая зависимость продольного магнитосопротивления при вращении магнитного поля относительно направления тока. Здесь в терминах простейшей теоретической модели дан сравнительный анализ экспериментальных результатов аргоннской группы и данных, полученных на кафедре физики низких температур.

Наконец, лекции 9 и 10 посвящены изучению отклика сверхпроводника на переменное электромагнитное поле. Здесь рассматривается задача об отражении и поглощении электромагнитной волны на поверхности сверхпроводника и обсуждается поглощение мощности вихрями на сверхвысоких частотах.

Для предварительного ознакомления с содержанием курса лекции сопровождаются планом изложения. Все лекции завершаются рядом контрольных вопросов, которые могут быть использованы как в аудиторной работе, так и при составлении экзаменационных билетов.

Мы приводим список учебников [1–3, 14], в которых изложена основная часть рассмотренных в лекциях вопросов, а также список журнальных статей, которые были существенно использованы при подготовке этих лекций. В качестве дополнительной литературы по пиннингу вихрей в сверхпроводниках приводятся ставшие уже классическими обзоры [9, 10] и указываются книги [11–13], освещающие актуальное состояние исследований в области вихревой материи.

Данный курс лекций читается в течение более пятнадцати лет на кафедре физики низких температур физического факультета ХНУ имени В. Н. Каразина проф. Шкловским В. А. Отдельные главы и экспериментальные аспекты курса обсуждаются на семинарах научной группы “Тонкие пленки и наноструктуры” Гете-университета г. Франкфурта-на-Майне с. н. с. Добровольским А. В.

Лекция 1

Введение

1.1 Основные экспериментальные факты

Ранее при изучении электрического сопротивления нормальных металлов рассматривались различные механизмы его температурной зависимости. Одни из них, обусловленные электрон-электронным и электрон-фононным рассеянием, давали постепенное уменьшение удельного электросопротивления ρ с уменьшением температуры T . Другие, обусловленные примесным рассеянием и тенденцией к локализации электронов, приводили к $\rho = \text{Const}$ при $T \rightarrow 0$ или даже к его росту при самых низких температурах [см. рис. 1.1(a)].

В 1911 году, однако, Камерлинг-Оннесом был обнаружен совершенно иной тип поведения температурной зависимости металла (ртути) при понижении температуры. А именно, для $T < T_c$ (где T_c – критическая температура) сопротивление образца обращалось в нуль скачком при $T = T_c$ [рис. 1.1(a), сплошная линия]. Так была открыта сверхпроводимость металлов.

Дальнейшее исследование свойств сверхпроводников показало, что сверхпроводимость может быть разрушена не только путем повышения температуры, но и в результате приложения достаточно сильного магнитного поля (Камерлинг-Оннес, 1914 г.). Поле, в котором исчезает сверхпроводимость H_c – критическое поле – уменьшается с ростом температуры [см. рис. 1.1(b)].

Разрушение сверхпроводимости имеет место и при пропускании через образец достаточно сильного электрического тока. Оказалось, что в простейших случаях критический ток I_c , при котором возникает сопротивление, удовлетворяет

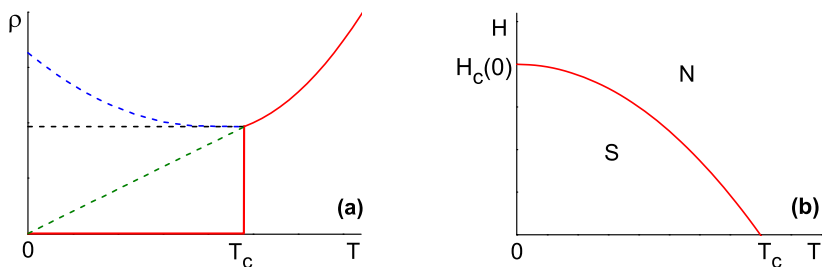


Рис. 1.1. (а) Поведение электрического сопротивления металлов при низких температурах. (б) Температурная зависимость критического поля сверхпроводника.

правилу Сильсби: магнитное поле, создаваемое током I_c на поверхности сверхпроводника, должно равняться H_c .

Другим основным (и более фундаментальным, чем исчезновение электросопротивления) свойством сверхпроводника является открытый в 1933 г. *эффект Мейсснера*. Именно, если поместить металл в магнитное поле $H < H_c(T)$, то при переходе образца в сверхпроводящее состояние с понижением T поле выталкивается из него, т. е. внутри образца $B = 0$ (подробнее см. пункт 1.6). Более детальные исследования обнаружили, что $B = 0$ лишь в толще массивного образца. В тонком поверхностном слое поле постепенно уменьшается от своего значения на поверхности практически до нуля на расстоянии λ , которое называется *глубина проникновения поля*. Величина λ зависит от разных факторов, в том числе и от температуры. Если $T \rightarrow T_c$, то $\lambda(T) \rightarrow \infty$.

Обсудим теперь некоторые термодинамические аспекты перехода из нормального состояния металла в сверхпроводящее (*NS* перехода). Если $H = 0$, то опыт показывает, что это фазовый переход *второго рода*, для которого отсутствует скрытая теплота, но имеется скачок в температурной зависимости теплоемкости электронов $C_e(T)$ [см. рис. 1.2(a)]. Если же переход происходит при $H \neq 0$ (т. е. при $T < T_c$), то это переход *первого рода*, при котором выделяется теплота перехода.

Отметим еще несколько экспериментальных фактов, свидетельствующих о том, что при *SN* переходе состояние электронной жидкости для $H = 0$ с повышением T изменяется непрерывно. Наряду с отмеченным выше ростом $\lambda(T)$ при $T \rightarrow T_c$, следует отметить, что обращение в нуль электросопротивления при

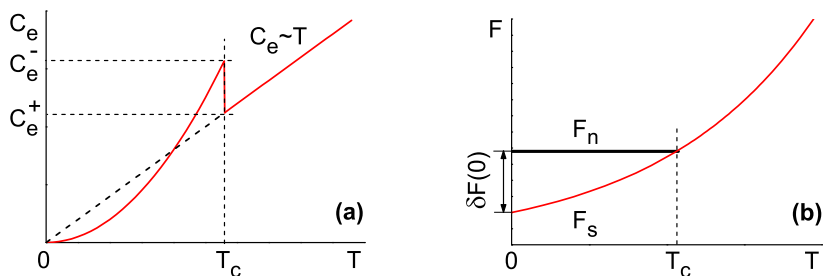


Рис. 1.2. Температурные зависимости (а) теплоемкости электронов $C_e(T)$ и (б) плотности энергии нормальной $F_n(T)$ и сверхпроводящей $F_s(T)$ фаз.

$T < T_c$ могло бы быть признаком того, что электроны перестают взаимодействовать с решеткой и, следовательно, не способны участвовать в теплопроводности. В таком случае полный коэффициент теплопроводности k (фононной и электронной) в точке перехода должен был бы уменьшаться скачком до значения, определяемого одними фононами. Этого, однако, не происходит и при $T = T_c$ коэффициент k изменяется непрерывно.

Рассмотрим более подробно поведение *электронной теплоемкости* сверхпроводника при низких температурах, которое можно извлечь после отделения фононного вклада в полную теплоемкость. Оказывается, что электронная теплоемкость C_e сверхпроводника при $T \ll T_c$ зависит от температуры по экспоненциальному закону $C_e = C_0 \exp(-\Delta/T)$. Это означает, что *возбужденные состояния* электронной подсистемы сверхпроводника отделены от *основного состояния энергетической щелью*, как в полупроводниках. Однако сверхпроводник по своим физическим свойствам очень сильно отличается от полупроводников. Одна из фундаментальных причин их различия заключается в том, что фазовый переход при $T = T_c$ является фазовым переходом *второго рода* и, соответственно, параметр порядка такого перехода (роль которого в сверхпроводнике играет энергетическая щель в спектре возбуждений Δ) сильно зависит от температуры, обращаясь в нуль при $T = T_c$. К этому следует также добавить, что на основе опытных данных по теплоемкости C_e можно вычислить плотность энергии F_s сверхпроводящей фазы [см. рис. 1.2(б), где ниже T_c зависимость $F_s(T)$ показана тонкой линией, а плотность свободной энергии нормального металла $F_n(T)$ – жирной линией]. Разность $\delta F(0) = F_n(0) - F_s(0)$ называется *энергией конденсации*

электронов и в расчете на один электрон она равна по порядку величины T_c^2/ϵ_F . Это в T_c/ϵ_F меньше средней энергии нормальных электронов при $T = T_c$ (здесь ϵ_F – энергия Ферми, а температура измеряется в энергетических единицах).

Используя типичные значения $\epsilon_F \sim 1$ eV и $T_c \sim 10^{-3}$ eV, получаем, что доля электронов проводимости, заметно изменяющих свою энергию в процессе конденсации, весьма мала, составляя величину порядка $T_c/\epsilon_F \sim 10^{-3}$.

Можно показать (см. [2], 15.2), что

$$F_n(T) - F_s(T) = H_c^2(T)/8\pi. \quad (1.1)$$

Формула (1.1) фактически означает, что $F_s(T)$ можно найти на основе опытных данных по температурной зависимости теплоемкости нормальной фазы и зависимости $H_c(T)$, что и можно считать ее экспериментальным доказательством, следующим из существования эффекта Мейсснера.

1.2 Двухжидкостная модель и длина когерентности

Изложенные выше основные факты подводят нас к следующей [упрощенной и сформулированной еще до создания теории Бардина-Купера-Шриффера (БКШ), 1957 г.] *двухжидкостной модели* сверхпроводящего состояния. Идея этой модели в основном состоит в предположении, что для $T < T_c$ электроны в металле распределены между двумя группами энергетических уровней. Часть полного числа электронов ($\sim T_c/\epsilon_F$), ответственных за термодинамические и кинетические свойства сверхпроводника, является “сверхпроводящими” или “сконденсированными”, число которых $n_s(T)$ обладает энергией конденсации порядка $\Delta(T)$ на один электрон. Остальные “нормальные” электроны отделены энергетической щелью $\Delta(T)$ от сверхпроводящих, которые (в отличие от нормальных) не участвуют в процессах рассеяния на примесях и тепловых (с энергией порядка T) фононах. Величина $\Delta(T)$ также может быть истолкована как *параметр порядка* конденсированной фазы, обращающейся в нуль для $T \geq T_c$.

В теории БКШ было показано, что $2\Delta(0) \approx 3.5T_c$ и

$$n_s(T) \sim (N(0)/2)\Delta^2(T) \approx H_c^2(T)/8\pi, \quad (1.2)$$

где $N(0)$ – плотность электронных состояний нормального металла на уровне

Ферми, а бозе-конденсат состоит из пар электронов (*куперовских пар*, названных так по имени автора этой концепции) с противоположными импульсами и спинами. Энергетический спектр нормальных возбуждений в теории БКШ имеет простой вид

$$\varepsilon_p(T) = \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2(T)}, \quad (1.3)$$

где $\xi_p = p^2/2m - p_F^2/2m \approx V_F(p - p_F)$ есть спектр электронных возбуждений в нормальном металле, для которого $\Delta = 0$. Из формулы (1.3) следует, что объединение электронов в пары затрагивает импульсы порядка $\delta p \sim \Delta/V_F$ вблизи ферми-границы. Но согласно принципу неопределенности $\delta p \delta x \sim \hbar$, откуда характерный размер куперовской пары порядка $\hbar/\delta p \approx \hbar V_F/\Delta(T)$.

Этот размер, называемый “корреляционной длиной”, обозначается обычно $\xi(T)$ и является минимальной длиной, на которой может меняться зависящий от координат параметр порядка $\Delta(T)$, т. е. плотность куперовских пар.

Получим еще простую оценку величины плотности сверхпроводящего тока j_s , при достижении которой происходит распад куперовских пар на одноэлектронные возбуждения (т. е. величины плотности так называемого “тока распаривания”. Для этого учтем, что увеличение кинетической энергии куперовской пары за счет ее движения со скоростью V , с учетом ее возможного “развала”, есть

$$\delta\varepsilon = (p_F + mV)^2/2m - (-p_F + mV)^2/2m = 2p_F V. \quad (1.4)$$

Тогда критическая скорость, при которой эта энергия становится равной $2\Delta(T)$, есть $V_c = \Delta/p_F$, а

$$j_c = en_s V_c = en_s(T)\Delta(T)/p_F \sim eN(0)\Delta^3(T)/2p_F. \quad (1.5)$$

Остановимся еще на зависимости ξ_0 и лондоновской глубины проникновения магнитного поля λ_L (см. пункт 1.3) от l – длины свободного пробега электрона при его рассеянии на примесях, в случае, когда $l \ll \xi_0$. Для этого оценим расстояние, на которое продифундирует электрон за время $t \sim \xi_0/V_F$. Тогда $\xi(t) \sim \sqrt{Dt} \approx \sqrt{lV_F \cdot \xi_0/V_F} \approx \sqrt{\xi_0 l} \approx \xi_0 \sqrt{l/\xi_0} \ll \xi_0$. Что касается влияния $l \rightarrow 0$ на величину глубины проникновения λ_L , то оказывается (см. [2], 16.10), что

$$\lambda \approx \lambda_L \sqrt{\xi_0/l} \gg \lambda_L. \quad (1.6)$$

Тогда

$$\alpha \approx \lambda/\xi \approx \lambda_L/l, \quad (1.7)$$

т. е. величина α (а с нею и величина критического поля H_{c2} , см. рис. 1.6 ниже) растет с уменьшением l .

Существенно, что соотношение между $\lambda(l)$ и $\xi(l)$ определяет характер электродинамического отклика сверхпроводника в терминах связи между плотностью сверхпроводящего тока $\mathbf{j}_s(\mathbf{r})$ и вектор-потенциалом электромагнитного поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (в лондоновской калибровке $\text{div } \mathbf{A} = 0$). А именно, в случае $\lambda \gg \xi$ реализуется *локальная электродинамика* Лондона, т. е. $\mathbf{j}_s(\mathbf{r})$ определяется величиной $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ в той же точке \mathbf{r} , тогда как в случае $\lambda \ll \xi$ реализуется нелокальная связь между $\mathbf{j}_s(\mathbf{r})$ и $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, то есть величина $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ определяется интегралом по ξ -окрестности точки \mathbf{r} .

1.3 Уравнение Лондонов и глубина проникновения поля

Используем теперь энергетическое рассмотрение пунктов 1.1 и 1.2 для анализа взаимосвязи сверхпроводящих токов плотностью $j_s(\mathbf{r})$ и магнитных полей $\mathbf{h}(\mathbf{r})$. Мы покажем, что условие минимума свободной энергии приводит к простому соотношению между полями и токами (Ф. Лондон, Г. Лондон, 1935 г.).

Свободную энергию сверхпроводника можно представить в виде суммы трех слагаемых

$$\mathcal{F} = \int [F_s(\mathbf{r}) + \mathbf{h}^2/8\pi + n_s m \mathbf{V}_s^2/2] d\mathbf{r}. \quad (1.8)$$

Здесь F_s – это плотность энергии сверхпроводящего конденсата в покое, второе слагаемое является плотностью энергии магнитного поля $\mathbf{h}(\mathbf{r})$, а последнее слагаемое есть плотность кинетической энергии сверхпроводящих токов $\mathbf{j}_s(\mathbf{r}) = n_s e \mathbf{V}_s(\mathbf{r})$, m – масса электрона. Используя уравнение Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{h} = (4\pi/c) \mathbf{j}_s, \quad (1.9)$$

формулу (1.8) удобно записать в виде

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + 1/8\pi \int [\mathbf{h}^2 + \lambda_L^2 (\text{rot } \mathbf{h})^2] d\mathbf{r}, \quad (1.10)$$

где $\lambda_L^2 = mc^2/4\pi n_s e^2$.

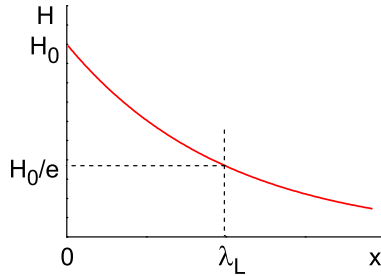


Рис. 1.3. Проникновение магнитного поля в массивный сверхпроводник.

Как будет показано ниже, величина λ_L — это глубина проникновения магнитного поля в массивный сверхпроводник, см. рис. 1.3.

При изменении (вариации) поля $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ на величину $\delta\mathbf{h}(\mathbf{r})$ энергия \mathcal{F} изменяется на величину $\delta\mathcal{F}$:

$$\delta\mathcal{F} = 1/4\pi \int (\mathbf{h}\delta\mathbf{h} + \lambda_L^2 \text{rot}\mathbf{h}\text{rot}\delta\mathbf{h}) d\mathbf{r} = 1/4\pi \int (\mathbf{h} + \lambda_L^2 \text{rot}\text{rot}\mathbf{h}) \delta\mathbf{h} d\mathbf{r} = 0. \quad (1.11)$$

В последней записи мы использовали известную формулу векторного анализа $\text{a rot b} = \text{b rot a} - \text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ и получили, что

$$\text{rot}\mathbf{h}\text{rot}\delta\mathbf{h} = \delta\mathbf{h}\text{rot}\text{rot}\mathbf{h} - \text{div}(\text{rot}\mathbf{h} \times \delta\mathbf{h}) \quad (1.12)$$

Учитывая, что интеграл от второго слагаемого в правой части (1.10) обращается в нуль, находим из (1.9), что конфигурация поля $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ внутри образца, приводящая к минимуму $\delta\mathcal{F}$, должна удовлетворять уравнению

$$\mathbf{h} + \lambda_L^2 \text{rot}\text{rot}\mathbf{h} = 0. \quad (1.13)$$

Уравнение Лондонов (1.13), совместно с уравнением Максвелла (1.9) позволяет находить распределение полей и токов в сверхпроводящем образце. Уравнение (1.13) можно переписать в иной форме, если использовать равенство $\mathbf{h} = \text{rot}\mathbf{A}$ и уравнение (1.9), а именно:

$$\mathbf{A} + (4\pi\lambda_L^2/c)\mathbf{j}_s = 0. \quad (1.14)$$

Так как из (1.9) следует, что $\operatorname{div} \mathbf{j}_s = 0$, то из (1.14) следует, что

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \quad (1.15)$$

т. е. при переходе $\mathbf{h} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ мы выбрали так называемую лондоновскую калибровку векторного потенциала \mathbf{A} .

Применяя теперь уравнение Лондонов (1.13) к задаче о проникновении магнитного поля в полупространстве легко показать, что

$$H = H_0 \exp(-x/\lambda_L), \quad x > 0, \quad (1.16)$$

где H_0 – поле на поверхности сверхпроводника. Из (1.16) следует, что магнитное поле *убывает* в глубину сверхпроводника, ослабляясь в e раз на длине λ_L , лондоновской глубине проникновения магнитного поля в массивный сверхпроводник [см. рис. 1.3].

1.4 Термодинамические соотношения в магнитном поле

Если $F_0(T, V)$ есть плотность свободной энергии металла в отсутствие магнитного поля, то ее приращение в магнитном поле определено соотношением

$$dF = dF_0 + \mathbf{H}d\mathbf{B}/4\pi, \quad (1.17)$$

где \mathbf{H} – напряженность поля, а \mathbf{B} – магнитная индукция (см. [2], с. 506). Следует отметить, однако, что определенная формулой (1.17) плотность свободной энергии Гельмгольца неудобна, так как фиксацию \mathbf{B} в эксперименте реализовать трудно. Поэтому удобной величиной является плотность так называемого потенциала Гиббса $\tilde{G} = F - (1/4\pi)\mathbf{B}\mathbf{H}$, для которого

$$d\tilde{G}(T, V, \mathbf{H}) = dF_0 - (1/4\pi)\mathbf{B}d\mathbf{H}. \quad (1.18)$$

Ввиду того, что экспериментально измеряемой величиной является намагниченность, удобно перейти к $G = \tilde{G} + H^2/8\pi$ и тогда

$$dG(T, V, \mathbf{H}) = dF_0 - \mathbf{M}d\mathbf{H}, \quad (1.19)$$

где \mathbf{M} определено соотношением $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$. Тогда, с учетом соотноше-

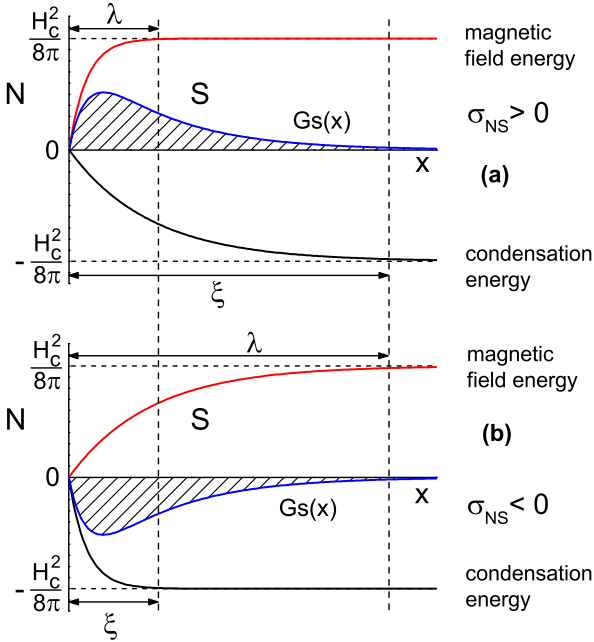


Рис. 1.4. Поверхностная энергия на границе раздела нормальной и сверхпроводящей фаз для (a) $\lambda \ll \xi$ и (b) $\xi \ll \lambda$.

ния (1.1), имеем

$$G_S(T, H) = G_S(T, H = 0) + H^2/8\pi = G_N(T, H) - H_c^2(T)/8\pi + H^2/8\pi. \quad (1.20)$$

В правой части (1.20) второе слагаемое – *плотность энергии конденсации* сверхпроводящих электронов, а последнее слагаемое равно *плотности магнитной энергии*.

1.5 Поверхностная энергия на границе раздела NS фаз

Вспользуемся теперь формулой (1.20) для оценки поверхностной энергии границы раздела нормальной и сверхпроводящей фаз (на единицу площади). Для этого рассмотрим пространственную зависимость $G_S(T, H)$ в предельных случаях $\lambda \ll \xi$ и $\lambda \gg \xi$. Если ось x направлена вглубь сверхпроводящего пространства, то для $x \rightarrow \infty$ условие равновесия границы раздела есть $G_S(T, H) = G_N(T, H)$, что

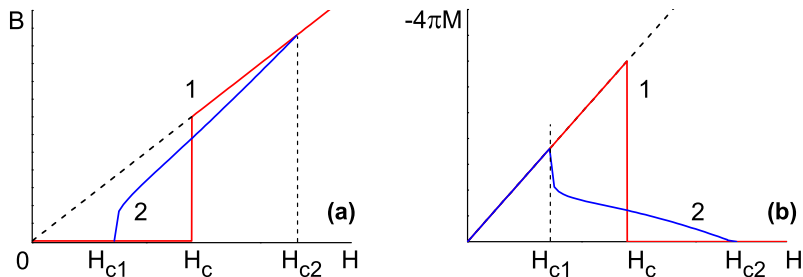


Рис. 1.5. Магнитная индукция и магнитный момент сверхпроводника.

возможно для $H = H_c(T)$. В то же время поведение $G_S(x)$ вблизи NS границы будет определяться конкуренцией энергии конденсации, которая изменяется на масштабе ξ , и магнитной энергии с характерным масштабом ее изменения λ . Схематические графики зависимости $G_S(x)$ в лондоновском ($\lambda \gg \xi$) и пиппардовском ($\lambda \ll \xi$) сверхпроводниках приведены на рис. 1.4. Из рис. 1.4(a) видно, что для $\lambda \ll \xi$ величина $\sigma_{NS} > 0$, так как магнитный вклад доминирует по сравнению с вкладом от энергии конденсации. В случае $\lambda \gg \xi$ на рис. 1.4(b) ситуация обратная и $\sigma_{NS} < 0$.

Легко получить “буквенную” оценку для σ_{NS} , если заменить λ и ξ их “эквивалентными” длинами, отнесенными к середине каждого масштаба. Тогда

$$-\sigma_{NS} \approx (\lambda/2)(H_c^2/8\pi) - (\xi/2)(H_c^2/8\pi) = (\lambda - \xi)(H_c^2/16\pi), \quad (1.21)$$

и отсюда мы имеем оценку как величины, так и знака σ_{NS} .

1.6 Сверхпроводники первого и второго рода

Сверхпроводники, для которых $\lambda \ll \xi$ (т. е. $\kappa \ll 1$ и $\sigma_{NS} > 0$), принято называть сверхпроводниками *первого рода*, а те, для которых $\lambda \gg \xi$ (т. е. $\kappa \gg 1$ и $\sigma_{NS} < 0$), называются сверхпроводниками *второго рода*. Очевидно, что при некотором значении $\kappa \sim 1$ энергия σ_{NS} обратится в нуль. Точный расчет показывает (см. [2], с. 391), что $\sigma_{NS} = 0$ для $\kappa = 1/\sqrt{2}$.

Знак поверхностной энергии оказывается определяющим для характеристики поведения сверхпроводника в магнитном поле, т. е. вида зависимостей $B(H)$ и $M(H)$. Для сверхпроводников первого рода магнитное поле, направленное вдоль

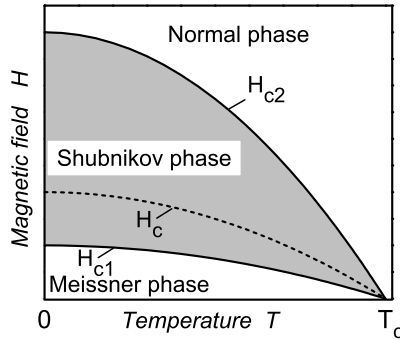


Рис. 1.6. Фазовая диаграмма состояния сверхпроводников второго рода.

оси цилиндрического образца, проникает в него скачком при $H = H_c$ [рис. 1.5(a), кривая 1], а не путем его расслоения на N и S слои (что требует дополнительных затрат энергии на создание NS границ при $\sigma_{NS} > 0$). Для сверхпроводников второго рода ситуация иная – поле проникает в цилиндр в виде квантованных вихрей (см. лекцию 2), постепенно, начиная с поля $H_{c1} \ll H_c$ и цилиндр становится нормальным лишь при $H = H_{c2} \gg H_c$ для $\kappa \gg 1$ [рис. 1.5(a), кривая 2]. Соответственно, *диамагнетизм сверхпроводника первого рода* исчезает скачком при $H = H_c$ [рис. 1.5(b), кривая 1], тогда как для сверхпроводника второго рода его убывание до нуля растягивается на весь интервал полей $H_{c1} < H < H_2$, за счет постепенного вхождения в цилиндр вихрей, реализующих *парамагнитный* отклик [рис. 1.5(b), кривая 2]. Как следствие, *фазовая диаграмма сверхпроводника второго рода* (на плоскости H - T) имеет более сложный вид (рис. 1.6), чем аналогичная диаграмма для сверхпроводника первого рода [рис. 1.1(b)]. На рис. 1.6 затененная область соответствует наличию вихрей и называется смешанным состоянием или “фазой Шубникова”. Именно эта фаза сверхпроводников второго рода будет обсуждаться во всех последующих лекциях.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое энергия конденсации электронов? Порядок ее величины.
2. Какова роль конденсата и нормальных возбуждений в поведении электронной теплоемкости сверхпроводника?
3. Оцените размер куперовской пары.
4. Оцените величину тока распаривания.
5. Оцените величину лондоновской глубины проникновения.
6. Объясните разницу между сверхпроводниками первого и второго рода.
7. Вычислить координатную зависимость плотности сверхпроводящего тока в мейснеровском слое сверхпроводящего полупространства.

Лекция 2

Вихрь и его свойства

2.1 Энергия и магнитный момент вихря

Итак, сверхпроводники 2-го рода обладают рядом интересных особенностей. Если цилиндрический образец такого сверхпроводника помещен в продольное магнитное поле, то в полях меньших H_{c1} , он ведет себя подобно сверхпроводникам 1-го рода, т. е. обнаруживает обычный эффект Мейсснера. Однако, начиная с H_{c1} , состоянием с меньшей энергией оказывается состояние, в котором магнитный поток частично проникает в сверхпроводник в виде отдельных нитей малого диаметра. Магнитный поток, заключенный в одной такой нити, называемой *вихрем*, равен кванту магнитного потока.

На рис. 2.1 изображена следующая из теории Гинзбурга-Ландау структура вихря (оси вихря соответствует начало координат). Видно, что вихрь является особенностью квадрата модуля параметра порядка $|\psi|^2$, пропорционального плотности куперовских пар $n_s(r)/2$ (“сверхпроводящих электронов” с плотностью n_s). Квантованные вихри являются принадлежностью сверхпроводников 2-го рода, для которых $\kappa > 1/\sqrt{2}$, где $\kappa \equiv \lambda_L/\xi$. Поэтому радиусы, на которых текут сверхпроводящие вихревые токи, плотностью $j_s(r)$, значительно превышают радиус нормальной сердцевины вихря, если $\lambda_L \gg \xi$. В этой же области радиуса λ_L распределен и магнитный поток вихря, равный одному кванту $\Phi_0 = \pi\hbar c/e \simeq 2 \times 10^{-7}$ гс·см².

Рассмотрим теперь вокруг оси вихря круговой контур радиуса r , вдоль которого куперовские пары совершают вращение с постоянным по модулю импуль-

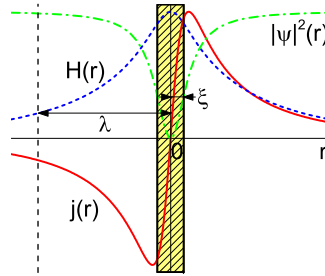


Рис. 2.1. Структура одиночного вихря, следующая из теории Гинзбурга-Ландау. Оси вихря соответствует начало координат. Нормальная сердцевина (кор) вихря показана штриховкой.

сом $p_s(r) = 2mv_s(r)$. Тогда из условия квантования действия на этом контуре

$$\oint \mathbf{p}_s d\mathbf{l} = 2\pi\hbar \tag{2.1}$$

следует, что зависимость скорости сверхпроводящих пар от расстояния до оси вихря имеет такой вид:

$$v_s = \hbar/2mr, \quad (\xi < r < \lambda_L). \tag{2.2}$$

Из формулы (2.2) следует, что в центре вихря ($r = 0$) V_s обращается в бесконечность, тогда как плотность сверхпроводящего тока для $r = 0$ пропорциональна произведению $n_s V_s$, должна обращаться там в нуль из-за того, что $n_s(r \rightarrow 0)$ стремится к нулю быстрее, чем r . В результате зависимость $j_s(r)$ имеет характерный максимум для $r \sim \xi$, причем $j_m(r \sim \xi) \simeq j_c \approx en_s V_c \approx en_s \hbar/m\xi_0$, где j_c – плотность тока распаривания [см. формулу (1.5)].

Энергия вихря является в основном кинетической энергией ϵ_0 куперовских пар, вращающихся вокруг оси вихря. Вычислим ее, используя формулу (2.2). Тогда

$$\epsilon_0 = n_s/2 \int_{\xi}^{\lambda_L} [(2mV_s^2)/2] 2\pi r dr = (\pi n_s \hbar^2/4m) \ln \kappa \equiv (\Phi_0/4\pi\lambda_L)^2 \ln \kappa. \tag{2.3}$$

Из формулы (2.3) следует, что энергия вихря положительна ($\epsilon_0 > 0$), т. е. в отсутствие внешнего магнитного поля образование вихря невыгодно. Чтобы найти то магнитное поле, когда появление вихря становится выгодным, вычислим также магнитный момент вихря на единицу его длины, используя формулу

$\mathbf{m} = (1/2c)\mathbf{j} \times \mathbf{r}$, где $\mathbf{j} = \mathbf{j}_s = en_s \mathbf{V}_s$. Тогда

$$M = \int_{\xi}^{\lambda_L} m(r) 2\pi r dr = \frac{\pi e \hbar n_s \lambda_L^2}{4mc} = \frac{\Phi_0}{16\pi}. \quad (2.4)$$

В присутствии внешнего магнитного поля H у вихря появляется магнитная энергия $-MH$. Тогда наименьшее поле, при котором появляется вихрь, определяется условием $\varepsilon_0 - MH = 0$, то есть

$$H_{c1} = \varepsilon_0/M \approx \frac{\Phi_0}{\pi \lambda_L^2} \ln \varkappa. \quad (2.5)$$

В рамках более детального расчета (см. [2], с. 369) можно показать, что магнитное поле в центре вихря $H(0)$ примерно вдвое больше величины H_{c1} [рис. 2.1]. С другой стороны, грубая оценка величины H_{c1} по формуле $H_{c1} = \Phi_0/\pi \lambda_L^2$ дает близкий результат [в $\ln \varkappa$ раз меньше (2.5)].

2.2 Магнитное поле вихря

Оценим теперь в лондоновском приближении (т. е. пренебрегая наличием ко-ра у вихря, что справедливо для $\varkappa \gg 1$) радиальную зависимость магнитного поля вихря. Для этого сначала запишем свободную энергию сверхпроводника без вихрей в виде объемного интеграла от суммы плотности магнитной энергии $\mathbf{H}^2/8\pi$ и плотности кинетической энергии сверхпроводящих токов $n_s(mV_s^2/2)$ в виде

$$\mathcal{F} = 1/8\pi \int [\mathbf{H}^2 + \lambda_L^2(\text{rot}\mathbf{H})^2] dV, \quad (2.6)$$

где $\lambda_L^2 = mc^2/4\pi n_s e^2$ – лондоновская глубина проникновения магнитного поля. Приравнявая нулю вариацию $\delta\mathcal{F}$ по $\delta\mathbf{H}$ и добавляя вихревой источник к однородному уравнению, следующему из (2.6), получаем уравнение для магнитного поля вихря

$$\mathbf{H} + \lambda_L^2 \text{rot rot}\mathbf{H} = \Phi_0 \mathbf{n} \delta(\mathbf{r}), \quad (2.7)$$

где \mathbf{n} – это единичный вектор, вдоль которого направлен вихрь ($\mathbf{n} = \mathbf{H}/H$), а $\delta(\mathbf{r})$ – двумерная дельта-функция Дирака.

Напомним, что решение однородного уравнения (2.7) во внешнем поле \mathbf{H}_0 , параллельном границе сверхпроводящего полупространства приводит к реше-

нию $H(z) = H_0 e^{-z/\lambda_L}$, дающему затухание магнитного поля вглубь сверхпроводника, то есть эффект Мейсснера.

В случае вихря решение уравнения (2.7) в цилиндрических координатах при $\varkappa \gg 1$ имеет вид (см. [1], с. 26):

$$H = (\Phi_0/2\pi\lambda_L^2)K_0(r/\lambda_L), \quad (2.8)$$

где $K_0(\rho)$ есть функция Макдональда, монотонно убывающая с ростом ρ и имеющая асимптотики ([1], с. 26)

$$K_0(\rho) \sim \begin{cases} \ln(1/\rho) & \rho \ll 1, \\ e^{-\rho}/\sqrt{\rho} & \rho \gg 1. \end{cases} \quad (2.9)$$

Из (2.8) и (2.9) следует, что для $r \sim \xi$ имеем $H(0) \approx (\Phi_0/2\pi\lambda_L^2) \ln \varkappa$.

2.3 Взаимодействие вихрей между собой

Пусть внешнее поле $H_0 \gg H_{c1}$, т. е. в образце появляется много вихрей. Среднее расстояние между ними a_0 можно оценить по формуле $B = n_v \Phi_0$, где $n_v \sim a_0^{-2}$ с учетом того, что $B \approx H_0$. Для того, чтобы понять как взаимодействуют вихри между собой, рассмотрим сначала два вихря на расстоянии R друг от друга. Если $R \gg \lambda_L$, то качественно можно считать, что вихри эквивалентны достаточно удаленным друг от друга сверхпроводящим соленоидам, которые слабо отталкиваются друг от друга. Если же $a_0 \lesssim \lambda_L$, то сердцевина одного из вихрей оказывается в области достаточно сильных сверхпроводящих токов другого вихря и для качественного анализа взаимодействия вихрей удобно обратиться к анализу ситуации с точки зрения эффекта Бернулли в пространственной картине распределения скоростей сверхтекучей электронной жидкости. Предварительно напомним классическую схему эксперимента, который демонстрирует эффект Бернулли в обычной гидродинамике по течению потока жидкости в трубке с сужением (см. рис. 2.2). Этот эффект состоит в том, что в месте сужения скорость потока V_2 больше, а гидростатическое давление P_2 меньше, чем в основном сечении трубки (V_1 и P_1 , соответственно). Из него видно, что в области между вихрями происходит уменьшение модуля суммарной сверхпроводящей скорости $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{V}_2(\mathbf{r})$, тогда как вне вихрей направления $\mathbf{V}_1(\mathbf{r})$ и $\mathbf{V}_2(\mathbf{r})$ одинаковы (на линии, соединяющей центры вихрей). Отсюда из закона Бернулли

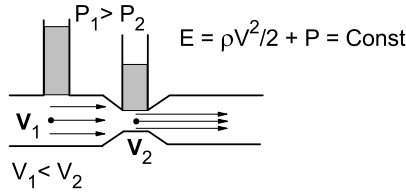


Рис. 2.2. Схема эффекта Бернулли в гидродинамике.

следует, что гидродинамическое давление между вихрями больше, чем снаружи вихрей, что и приводит к отталкиванию одноименных (то есть одинаково ориентированных вихрей). Из этих соображений сразу следует, что разноименные вихри (т. е. вихрь и антивихрь) притягиваются.

Перейдем теперь к количественному расчету силы взаимодействия двух одноименных вихрей, имеющих координаты \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , с помощью уравнения (2.7), в котором правая часть заменена выражением для двух источников вида

$$\Phi_0 \mathbf{n} [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)]. \quad (2.10)$$

В этом случае анализ, аналогичный таковому для одного вихря, приводит к выводу, что

$$\mathcal{F} = (\Phi_0/8\pi)[H(\mathbf{r}_1) + H(\mathbf{r}_2)], \quad (2.11)$$

где $H(\mathbf{r}_1) = H_0(\mathbf{r}_1) + H_{12}(\mathbf{r})$ – это поле в центре первого вихря. Здесь $H_0(\mathbf{r}_1)$ – собственное поле первого вихря, а $H_{12}(\mathbf{r})$ – это поле, созданное вторым вихрем в точке \mathbf{r}_1 , т. е. $H_{12}(\mathbf{r}) = H_0(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$. Аналогичные соображения относятся к полю $H(\mathbf{r}_2)$. Тогда из (2.11) следует, что

$$\mathcal{F} = 2\varepsilon_0 + (\Phi_0/8\pi)2H_{12}(r), \quad (2.12)$$

где ε_0 – энергия одиночного вихря [см. формулу (2.3)], а $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ – расстояние между вихрями. Обозначая $U(r) \equiv (\Phi_0/4\pi)H_{12}(r)$, имеем

$$f_1 = -dU/dr = -(\Phi_0/4\pi)dH_{12}(r)/dr = -(\Phi_0/c)j_{12}(r), \quad (2.13)$$

где f_1 – сила, с которой действует второй вихрь на первый, а $j_{12}(r)$ – величина сверхпроводящего тока вихря 2 в центре вихря 1. Векторным обобщением формулы (2.13) является известное (см. пункт 2.5) выражение для силы Лорен-

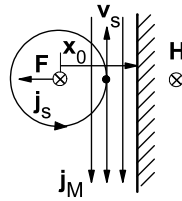


Рис. 2.3. Взаимодействие вихря с поверхностью сверхпроводника.

ца, действующей со стороны транспортного тока плотностью \mathbf{j} на вихрь, направленный вдоль орта \mathbf{n}

$$\mathbf{f}_L = (\Phi_0/c)\mathbf{j} \times \mathbf{n}. \quad (2.14)$$

2.4 Взаимодействие вихря с поверхностью сверхпроводника

Рассмотрим теперь взаимодействие вихря с поверхностью сверхпроводника – сначала на качественном уровне. Легко понять, что вихрь, параллельный поверхности, притягивается к ней. Действительно, если x_0 – расстояние между вихрем и поверхностью меньше λ , то линии сверхпроводящих токов вихря искажаются так, что сверхтекучая скорость между вихрем и поверхностью сверхпроводника оказывается больше, чем слева от вихря (см. рис. 2.3). Поэтому на сердцевину вихря будет действовать разность бернуллиевских давлений и вихрь притягивается к поверхности тем сильнее, чем меньше расстояние x_0 между ними.

Количественно оценить силу притяжения вихря к поверхности можно с помощью так называемого метода изображений. Для этого вспомним, что в случае $\kappa \gg 1$ поле одиночного вихря удовлетворяет линейному уравнению (2.7). При этом поле, создаваемое вихрем на поверхности сверхпроводника, должно быть равно нулю (в силу непрерывности тангенциальных компонент поля \mathbf{H} и условия $\mathbf{H} = 0$ вне полупространства). Таким образом, к уравнению, описывающему взаимодействие вихря с поверхностью сверхпроводника, необходимо добавить нулевое граничное условие на поверхности. Но так как для линейных уравнений можно применять принцип суперпозиции, то удобно заменить нашу задачу другой, ей эквивалентной. Именно, рассмотрим уже не полупространство, а

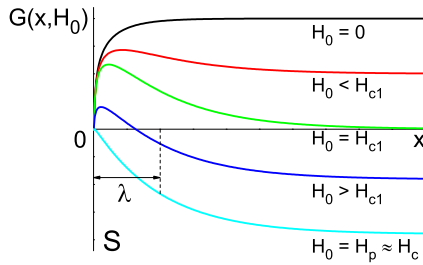


Рис. 2.4. Пространственная зависимость потенциала Гиббса вихря $G(x, H_0)$ при различных значениях величины H_0 .

безграничный сверхпроводник с двумя вихрями противоположного знака, расположенных в точках $\pm x_0$. Тогда, в силу симметрии задачи, поле на поверхности $x = 0$ всюду равно нулю, а для $x > 0$ должно выполняться уравнение (2.7). Таким образом поля, создаваемые парой вихрей в полупространстве $x > 0$ и одним вихрем в исходной задаче должны быть одинаковы, т. е. силу взаимодействия вихря с поверхностью на рис. 2.3 можно вычислить как силу взаимодействия вихря и антивихря, воспользовавшись формулой (2.13).

Пусть теперь параллельно поверхности сверхпроводника включено магнитное поле H_0 , направленное вдоль поля вихря и создающее на расстоянии $\sim \lambda$ вблизи границы сверхпроводника мейсснеровский ток j_M , который, как легко понять, будет отталкивать вихрь от границы. Действительно, так как направление мейсснеровских токов и токов вихря в области между вихрем и границей противоположны (см. рис. 2.3), то разность бернуллиевских давлений в этом случае приводит к силе, отталкивающей вихрь от границы.

Рассмотренные выше наглядные соображения о конкуренции сил притяжения и отталкивания от границы в зависимости от расстояния вихря до нее x_0 и величины внешнего поля H_0 позволяют понять графики пространственной зависимости потенциала Гиббса вихря $G(x, H_0)$ при различных значениях величины H_0 (см. рис. 2.4). Если $H_0 = 0$, то $G(x)$ — монотонно растущая функция x , так как вихрю в этом случае невыгодно находиться в сверхпроводнике и он стремится выйти из него под действием силы притяжения к границе $f = -\partial G/\partial x$. Если $0 < H_0 < H_{c1}$, то зависимость $G(x)$ имеет максимум, т. е. возможно метастабильное состояние вихря в сверхпроводнике, когда пребывание его в сверхпро-

воднике невыгодно ($G > 0$), однако для *выхода* из образца надо преодолеть так называемый энергетический барьер Бина-Ливингстона.

При $H_0 = H_{c1}$ (см. рис.2.4) вихрю впервые становится термодинамически выгодно существовать в сверхпроводнике, однако теперь и *проникновению* вихря внутрь образца мешает барьер Бина-Ливингстона. С ростом поля H_0 этот барьер все понижается и $G(x) < 0$ в глубине образца, однако вихри еще не могут преодолеть барьер, так что образец находится все еще в мейсснеровском состоянии (перегретом, так как $H_0 > H_{c1}$). Барьер исчезает лишь при некотором поле $H_0 = H_p$, называемым *полем перегрева мейсснеровского состояния*. Для гладкой границы, как показывает расчет, $H_p \approx H_c$, т. е. $H_p \gg H_{c1}$ для $\kappa \gg 1$.

2.5 Динамические свойства вихрей

Состояние, в котором сверхпроводник 2-го рода находится между первым и вторым критическими полями, называется смешанным. Вихревая структура такого состояния (*решетка Абрикосова*) оказывается неустойчивой по отношению к сверхпроводящему току, протекающему перпендикулярно приложенному магнитному полю. Этот транспортный ток плотностью \mathbf{j}_s , течет ли он по поверхности или по всему сечению сверхпроводника, взаимодействует с квантованными нитями магнитного потока, приводя к появлению силы Лоренца на *единицу объема*:

$$\mathbf{F}_L = (\mathbf{j}_s \times \mathbf{B})/c, \quad (2.15)$$

где \mathbf{B} – средняя магнитная индукция, которая слабо изменяется на масштабе межвихревого расстояния a при $a \leq \lambda$. Если же $a \gg \lambda$, т. е. флуктуации магнитного поля \mathbf{B} на масштабе a значительны, то имеет смысл ввести силу Лоренца, действующую на *единицу длины* вихря по такой формуле:

$$\mathbf{f}_L = (\Phi_0/c)\mathbf{j}_s \times \mathbf{n}, \quad (2.16)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор вдоль направления \mathbf{B} . Формально переход от формулы (2.15) к формуле (2.16) производится с учетом того, что $\mathbf{B} = n\mathbf{B}$, где величина магнитной индукции $B = n_v\Phi_0$, а n_v – плотность вихрей. Тогда $\mathbf{F}_L = n_v\mathbf{f}_L$.

В свободном от дефектов идеальном сверхпроводнике 2-го рода сколь угодно малая сила Лоренца приведет к движению вихрей. Это движение будет вязким,

диссипативным из-за появления омических потерь в сердцевинах вихрей и, следовательно, часть подводимой мощности должна идти на поддержание этого движения. Диссипация энергии (на единицу длины) для одного вихря, движущегося со скоростью \mathbf{V} , дается формулой:

$$P = \mathbf{f}_L \cdot \mathbf{V} = (\Phi_0/c)(\mathbf{j}_s \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{V}. \quad (2.17)$$

Отсюда, используя свойства смешанного векторного произведения и то, что $\mathcal{P} = n_v P = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_s$, где \mathcal{P} – диссипация в единице объема, имеем

$$\mathbf{E} = (\mathbf{B} \times \mathbf{V})/c. \quad (2.18)$$

Рассмотрим силу вязкого трения $\mathbf{f}_\eta = -\eta \mathbf{V}$, где η – это коэффициент вязкости, учитывающий механизмы диссипации энергии при движении квантованного вихря, \mathbf{V} – скорость вихря. Если $V = \text{Const}$, то справедливо равенство

$$\mathbf{f}_L + \mathbf{f}_\eta = 0. \quad (2.19)$$

Тогда, зная скорость вихря $\mathbf{V} = \mathbf{f}_L/\eta$ и подставляя ее в (2.18), получаем:

$$\mathbf{E} = (\Phi_0 B/\eta c^2)\mathbf{j} = \rho_f \mathbf{j}, \quad (2.20)$$

где $\rho_f = B\Phi_0/\eta c^2$ – удельное сопротивление сверхпроводника в резистивном состоянии. Учтем теперь, что для $B = B_{c2}$ должно быть $\rho_f(B_{c2}) = B_{c2}\Phi_0/\eta c^2 = \rho_n$, где ρ_n есть сопротивление сверхпроводника в нормальном состоянии. Выразим отсюда η и подставим в первоначальное выражение для ρ_f . Тогда ρ_f , выраженное через индукцию магнитного поля и второе критическое поле, имеет вид

$$\rho_f = (B/B_{c2})\rho_n. \quad (2.21)$$

Результат (2.21) имеет простой физический смысл: ρ_f пропорционально концентрации нормальной фазы (представленной нормальными сердцевинами вихрей с удельным сопротивлением ρ_n) в объеме сверхпроводника.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как вычислить расстояние между вихрями в решетке Абрикосова, если индукция магнитного поля равна B ?
2. Каково физическое происхождение энергии вихря? Ее размерность?
3. Качественно объясните появления силы взаимодействия между двумя вихрями.
4. Каково влияние внешнего магнитного поля на взаимодействие вихря с поверхностью сверхпроводника?

Лекция 3

Тензор электропроводности в магнитном поле

3.1 Уравнение движения вихря с учетом эффекта Холла

В лекции 2 было показано, что если на ансамбль вихрей действует лишь сила Лоренца и вязкая сила, то скорость вихрей \mathbf{V} направлена перпендикулярно вектору плотности транспортного тока \mathbf{j}_s , а возникающее в результате такого движения вихрей электрическое поле \mathbf{E}_{\parallel} совпадает по направлению с \mathbf{j}_s , т. е. является *продольным*. Опыт показывает, однако, что кроме \mathbf{E}_{\parallel} , появляется и поперечное (т. е. перпендикулярное \mathbf{j}_s) электрическое поле \mathbf{E}_{\perp} , называемое *холловским* полем, которое обычно значительно меньше по величине продольного поля \mathbf{E}_{\parallel} .

Для вычисления \mathbf{E}_{\perp} мы будем считать, что в этом случае на вихрь, движущийся со скоростью \mathbf{V} , действуют уже три силы: вязкая сила $\mathbf{f}_{\eta} = -\eta \mathbf{V}$, холловская сила $\mathbf{f}_H = -\alpha_H \mathbf{V} \times \mathbf{n}$ и сила Лоренца $\mathbf{f}_L = (\Phi_0/c) \mathbf{j} \times \mathbf{n}$. Если $V = \text{Const}$, то сумма этих трех сил равна нулю и тогда уравнение движения вихря будет

$$\eta \mathbf{V} + \alpha_H \mathbf{V} \times \mathbf{n} = \mathbf{f}_L. \quad (3.1)$$

Для решения этого векторного (относительно \mathbf{V}) уравнения сначала домножим векторно слева обе его части на \mathbf{n} , а затем, учитывая, что $\mathbf{B} = n\mathbf{B}$, $\mathbf{n} = n\mathbf{z}$, где \mathbf{z} – единичный вектор в z -направлении, а $n = \pm 1$, получим:

$$\eta \mathbf{n} \times \mathbf{V} + \alpha_H \mathbf{n} \times \mathbf{V} \times \mathbf{n} = \mathbf{n} \times \mathbf{f}_L. \quad (3.2)$$

Далее, учитывая что $\mathbf{n} \times \mathbf{V} \times \mathbf{n} = \mathbf{V}$, из уравнения (3.2) находим величину

$\mathbf{n} \times \mathbf{V}$ и, подставляя ее затем в уравнение (3.1), получим

$$\mathbf{V} = (\eta \mathbf{f}_L + \alpha_H \mathbf{n} \times \mathbf{f}_L) / (\alpha_H^2 + \eta^2). \quad (3.3)$$

Подставляя сюда $\mathbf{f}_L = (\Phi_0/c)(\mathbf{j} \times \mathbf{n})$, окончательно имеем

$$\mathbf{V} = (\Phi_0/c)(\eta \mathbf{j} \times \mathbf{n} + \alpha_H \mathbf{j}) / (\alpha_H^2 + \eta^2). \quad (3.4)$$

Нашей задачей является получение вольт-амперной характеристики образца, то есть зависимости E от j . Вычислим для этого электрическое поле с учетом эффекта Холла. Среднее электрическое поле, вызванное движением вихревой системы со скоростью \mathbf{V} , рассчитывается по формуле (2.18). Подставляя сюда выражение для скорости (3.4), получим искомое поле

$$\mathbf{E} = \rho_f (\mathbf{j} - \varepsilon \mathbf{n} \times \mathbf{j}) / (\varepsilon^2 + 1), \quad (3.5)$$

где $\varepsilon = \alpha_H/\eta$. Если $\varepsilon = 0$, то мы возвращаемся к случаю, рассмотренному в предыдущей лекции [см. формулу (2.20)]. В случае, когда $\eta = 0$ (т. е. на вихрь действует только холловская сила) из уравнения (3.4) следует, что скорость вихря будет равна:

$$\mathbf{V}_H = (\Phi_0/\alpha_H c) \mathbf{j}. \quad (3.6)$$

Эта скорость, направление которой совпадает с направлением тока, называется холловской. Из формул (2.18) и (3.6) следует, что напряжение в этом случае будет чисто поперечным, т. е. холловское электрическое поле имеет такой вид:

$$\mathbf{E}_H = (B\Phi_0/\alpha_H c^2) \mathbf{n} \times \mathbf{j}. \quad (3.7)$$

и является нечетным по отношению к замене знака \mathbf{B} на противоположный, т. е. к инверсии направления магнитного поля.

3.2 Продольное и холловское напряжения. Угол Холла

Полное электрическое поле, как следует из формулы (3.5), удобно разделить на продольное \mathbf{E}_{\parallel} и поперечное \mathbf{E}_{\perp} по отношению к направлению транспортного тока, т. е.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{E}_{\parallel}, \quad (3.8)$$

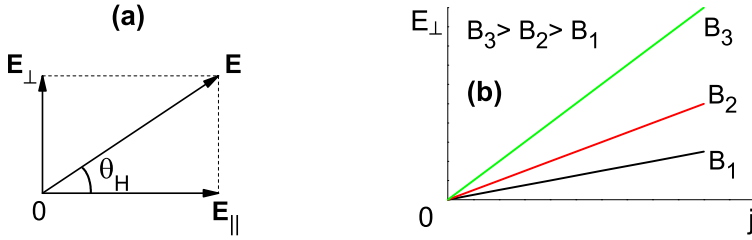


Рис. 3.1. (а) Определение угла Холла. (б) Поперечная (холловская) ВАХ для трех значений магнитного поля.

где E_{\parallel} пропорционально j , а E_{\perp} пропорционально $\mathbf{n} \times \mathbf{j}$ и $E_{\parallel} = E^{+}(n)$, а $E_{\perp} = E^{-}(n)$. Здесь индексы (\pm) для результирующего поля E означают четную (+) и нечетную (-) части функции $E(n)$ по отношению к изменению знака n , то есть:

$$E^{\pm}(n) = [E(n) \pm E(-n)]/2, \quad (3.9)$$

так что $E(n) = E^{+}(n) + E^{-}(n)$.

Таким образом, в общем случае, когда α и η конечны, продольное напряжение на образце является четным по отношению к изменению знака магнитного поля, а поперечное – нечетным. Обычно для характеристики отношения этих двух напряженностей поля вводят представление об угле Холла θ_H [см. рис. 3.1(а)], такого что

$$\operatorname{tg} \theta_H = E_{\perp}/E_{\parallel} = \varepsilon. \quad (3.10)$$

Так как в большинстве сверхпроводников обычно $\alpha_H \ll \eta$ (т. е. $\varepsilon \ll 1$) и $E_{\perp} \ll E_{\parallel}$, то $\theta_H \approx \varepsilon \ll 1$. Из формулы (3.10) очевидно, что как продольная, так и поперечная вольт-амперная характеристика образца в рассматриваемом случае являются линейными [см. рис. 3.1(б)]. Крутизна (угол наклона) линейной зависимости $E_{\perp}(j)$ растет с ростом величины магнитного поля, так как напряжение пропорционально числу вихрей, которое, в свою очередь, пропорционально B .

3.3 Вычисление тензора электропроводности в магнитном поле (модель Друде)

В пункте 3.1 мы определили вязкую и холловскую силы, действующие на движущийся со скоростью \mathbf{V} вихрь, формулами

$$\mathbf{f}_\eta = -\eta \mathbf{V}, \quad \mathbf{f}_H = -\alpha_H \mathbf{V} \times \mathbf{n}, \quad (3.11)$$

где η и α_H являлись феноменологическими (определяемыми на опыте) коэффициентами вязкости и холловской вязкости. Теперь мы займемся выяснением микроскопического смысла этих коэффициентов. Для этого обратимся к простейшей модели Друде для движения электрона в магнитном поле и вычислим тензор электропроводности в магнитном поле (в приближении времени релаксации) исходя из уравнения движения электрона

$$m\dot{\mathbf{V}} + (m/\tau)\mathbf{V} = \mathbf{F}. \quad (3.12)$$

Здесь \mathbf{V} – скорость электрона, m – его масса, τ – время релаксации скорости, а $\mathbf{F} = -e[\mathbf{E} + (\mathbf{V} \times \mathbf{B})/c]$ – это сила, действующая на электрон со стороны электрического и магнитного полей \mathbf{E} и \mathbf{B} , e – величина заряда электрона ($e > 0$). Пусть $\mathbf{B} = n\mathbf{B}$ и $\mathbf{n} = n\mathbf{z}$, где $n = \pm 1$.

Учитывая, что

$$\mathbf{V} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ V_x & V_y & V_z \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix}, \quad (3.13)$$

уравнение (3.12) удобно записать в проекциях на оси xuz системы координат, используя обозначение $\omega_c = eB/mc$ для циклотронной частоты вращения электрона в магнитном поле, что дает:

$$\begin{cases} m\dot{V}_x + (m/\tau)V_x = -eE_x - mn\omega_c V_y, \\ m\dot{V}_y + (m/\tau)V_y = -eE_y + mn\omega_c V_x, \\ m\dot{V}_z + (m/\tau)V_z = -eE_z. \end{cases} \quad (3.14)$$

Пусть электрическое поле изменяется гармонически с частотой ω , т. е. $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp i\omega t$, тогда можно считать $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 \exp i\omega t$. С учетом связи $j_z = -NeV_z$, где j_z – компонента плотности электрического тока вдоль оси z , а N – число электронов

в единице объема, из уравнения (3.14) имеем

$$j_z = \sigma_0 E_z / (1 + i\omega\tau), \quad (3.15)$$

где $\sigma_0 = Ne^2\tau/m$ – статическая проводимость электронов.

Для вычисления xy -компонент тензора проводимости удобно умножить второе из уравнений (3.14) на i и перейти к циркулярным компонентам скорости, поля и тока по формулам $V_\perp = V_x + iV_y$, $E_\perp = E_x + iE_y$ и $j_\perp = j_x + ij_y$. Тогда, складывая первое из уравнений (3.14) со вторым, умноженным на i , можно получить соотношения между V_\perp и E_\perp в виде

$$V_\perp = -(e\tau E_\perp/m)/[1 + i(\omega - \omega_c)\tau], \quad (3.16)$$

и тогда

$$j_\perp = \sigma_0 E_\perp / [1 + i(\omega - \omega_c)\tau]. \quad (3.17)$$

Отделяя реальные и мнимые части в формуле (3.17), можно записать

$$\begin{cases} j_x = (\sigma_0 E_x)/\Delta + [\sigma_0(\omega - \omega_c)/\Delta]E_y \equiv \sigma_{xx}E_x + \sigma_{xy}E_y, \\ j_y = (\sigma_0 E_y)/\Delta + [\sigma_0(\omega - \omega_c)/\Delta]E_x \equiv \sigma_{yy}E_y + \sigma_{yx}E_x, \end{cases} \quad (3.18)$$

где $\Delta \equiv 1 + (\omega - \omega_c)^2\tau^2$. Отсюда следует, что

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = (\sigma_0/\Delta) \begin{pmatrix} 1 & (\omega - \omega_c)\tau \\ -(\omega - \omega_c)\tau & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

есть искомый тензор электропроводности.

Если $\omega = 0$ и $v \equiv \omega_c\tau$, то $\Delta_0 = 1 + v^2$. Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^0 &= -v\sigma_0/(1 + v^2), \\ \sigma_{xx}^0 &= \sigma_{yy}^0 = \sigma_0/(1 + v^2) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Здесь σ_{xy}^0 – статическая ($\omega = 0$) холловская проводимость, а σ_{xx}^0 и σ_{yy}^0 – диагональные компоненты тензора статической проводимости в магнитном поле.

Если же $\omega \neq 0$, то формулы (3.18) дают описание циклотронного резонанса электрона в магнитном поле с шириной резонансной линии порядка τ^{-1} вблизи $\omega = \omega_0$.

3.4 Получение микроскопических формул для α_H и η , их анализ для "чистого" и "грязного" пределов

Связь векторов \mathbf{E} и \mathbf{j} , даваемую формулами (3.15) и (3.17), можно представить в более компактном виде как

$$\mathbf{j} = \sigma_{\parallel} \mathbf{E} + \sigma_{\perp} \mathbf{E} \times \mathbf{n}, \quad (3.21)$$

где σ_{\parallel} и σ_{\perp} – это продольная и поперечная проводимости. Для $\omega = 0$ (статика) имеем $\sigma_{\parallel} = \sigma_0/(1+v^2)$, $\sigma_{\perp} = \sigma_0 v/(1+v^2)$. Сравнивая теперь формулы (3.1) и (3.21) можно получить микроскопические выражения для феноменологических вязких коэффициентов α_H и η . Действительно, подставляя выражение (2.18) для \mathbf{E} в формулу (3.21) и умножая результат векторно справа на $(\Phi_0/c)\mathbf{n}$, получаем

$$(\Phi_0/c)\mathbf{j} \times \mathbf{n} = (\Phi_0 B/c^2)(\sigma_{\parallel} \mathbf{V} + \sigma_{\perp} \mathbf{V} \times \mathbf{n}) \quad (3.22)$$

Тогда из сравнения формул (3.1) и (3.22) следует, что

$$\alpha_H = (\Phi_0 B/c^2)\sigma_0 v/(1+v^2), \quad \eta = (\Phi_0 B/c^2)\sigma_0/(1+v^2). \quad (3.23)$$

Но $(\Phi_0 B \sigma_0/c^2) = \pi \hbar N v$, где N – плотность электронов. Тогда формулы (3.23) могут быть переписаны в виде

$$\alpha_H = \pi \hbar N v^2/(1+v^2) \quad \eta = \pi \hbar N v/(1+v^2). \quad (3.24)$$

Если $v \ll 1$ [так называемый "грязный" предел, когда $\omega_c \ll (1/\tau)$], то из формулы (3.4) следует, что $\text{tg } \theta_H = E_{\perp}/E_{\parallel} \ll 1$. Для обратного предельного случая $v \gg 1$ ("чистый" предел) $\text{tg } \theta_H \gg 1$, т. е. холловский вклад в резистивный отклик [см. формулу (3.7)] является доминирующим.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем состоит эффект Холла и как его измерить?
2. Каковы физические причины появления холловского напряжения.?
3. Четность продольного и холловского напряжений по отношению к инверсии магнитного поля.
4. Как связаны между собой E_{\parallel}^{+} и E_{\perp}^{-} в рассмотренной в этой лекции задаче?
5. Как вычислить угол Холла, если известна зависимость $\mathbf{E}(\mathbf{j})$ в виде соотношений $\mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{H})$ и $\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{H})$?
6. Выведите формулу $\omega_c = eB/mc$ для циклотронной частоты вращения электрона в магнитном поле.
7. Поясните, почему случай $v \equiv \omega_c \tau \ll 1$ соответствует “грязному” пределу, а случай $v \gg 1$ – “чистому” пределу.
8. Докажите, что σ_{\parallel} и σ_{\perp} в формуле $\mathbf{j} = \sigma_{\parallel} \mathbf{E} + \sigma_{\perp} \mathbf{E} \times \mathbf{n}$ [формула (3.21)] есть продольная и поперечная проводимости.
9. Как ведут себя холловская и продольная проводимость в пределе $\omega \gg \omega_c$?

Лекция 4

Пиннинг вихрей в сверхпроводниках

4.1 Понятия пиннинга вихрей и критического тока

В предыдущей лекции было показано, что в бездефектном сверхпроводнике в присутствии сколь угодно малого транспортного тока всегда реализуется вязкое течение вихрей в режиме “течения потока” (flux-flow regime). Вольт-амперная характеристика сверхпроводника в этом случае является омической, т. е. транспортный ток через образец оказывается диссипативным. Для реализации бездиссипативного транспортного тока необходимо исключить возможность движения вихрей. Реально это можно осуществить с помощью введения в сверхпроводник различного рода дефектов, реализующих так называемый *пиннинг* (от английского слова pin – булавка), т. е. закрепление вихрей на неоднородностях образца. В этом случае требуется уже конечное значение силы Лоренца [пропорциональной плотности транспортного тока, см. формулу (2.14)] для начала движения вихрей. Последнее означает, что теперь существует такое значение транспортного тока J_c (который мы будем называть “критическим током”, подразумевая *ток депиннинга*), что для $J_s < J_c$ диссипация отсутствует и только для $J > J_c$ начинается движение вихрей и реализуется резистивное состояние образца.

С прикладной точки зрения величина критического тока и его зависимость от внешнего магнитного поля и температуры в смешанном состоянии является важнейшим параметром сверхпроводящего образца. Она существенно зависит от типа, числа и характера пространственного распределения (хаотического

или регулярного) дефектов, являющихся центрами пиннинга для вихрей. Являясь чувствительным (в отличии от критической температуры T_c и второго критического поля H_{c2}) структурно зависящим свойством, величина критической плотности тока может существенно (на несколько порядков) изменяться в зависимости от вида термомеханической обработки сверхпроводника.

4.2 Физическая природа пиннинга

Обратимся теперь к выяснению физической природы пиннинга вихрей на дефектах кристаллической структуры сверхпроводящего образца. Наиболее просто это можно пояснить на примере взаимодействия вихря с цилиндрической полостью (“треком”) радиуса $R \approx \xi(T)$, где ξ – это температурно зависящая *длина когерентности* сверхпроводящих электронов, т. е. конденсата куперовских пар. Если сердцевина трека не является сверхпроводящей, то вихрю выгодно локализоваться вдоль него, так как в этом случае энергия сверхпроводника с вихрем уменьшится на величину энергии конденсации, т. е. разницы энергий электронов металла в нормальном и сверхпроводящем состоянии [см. формулу (2.3)] в объеме кора вихря ε_c (на единицу его длины). Последнюю можно оценить так:

$$\varepsilon_c = (H_c^2/8\pi)(\pi\xi^2) = (H_c^2/8)\xi^2, \quad (4.1)$$

где H_c – термодинамическое критическое поле. Так как $H_c \approx H_{c2}/\kappa \approx (\Phi_0/\pi\xi^2)/(\lambda/\xi) \approx \Phi_0/\pi\xi\lambda$, где λ – глубина проникновения магнитного поля, то окончательно

$$\varepsilon_c \approx (\Phi_0/\pi\lambda)^2/8 \simeq 10^{-2}(\Phi_0/\lambda)^2. \quad (4.2)$$

Отсюда легко получается оценка силы притяжения вихря к треку (*силы пиннинга*)

$$f_p \simeq \varepsilon_c/\xi \approx 10^{-2}\Phi_0^2/\xi\lambda^2 \quad (4.3)$$

и, следовательно, оценка для величины транспортного тока, необходимого для отрыва вихря от трека (в случае $\mathbf{j}_s \perp \mathbf{n}$) из условия равенства силы f_p и силы Лоренца:

$$j_p = (c/\Phi_0)f_p \simeq 10^{-2}(c\Phi_0/\lambda^2\xi). \quad (4.4)$$

Численная оценка величины j_p для типичных значений параметров ВТСП при

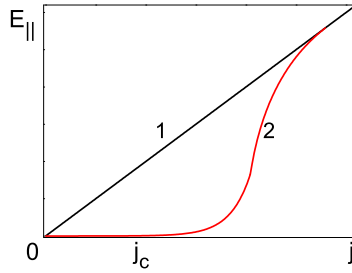


Рис. 4.1. Продольная ВАХ образца без пиннинга (1) и с пиннингом (2).

нулевой температуре $\xi_0 \approx 5 \times 10^{-7}$ см и $\lambda_0 \approx 2 \times 10^{-5}$ см дает $j_p \approx 10^8$ А/см². С ростом температуры T , однако, эта величина существенно уменьшается. Если обозначить $t = T/T_c$ и учесть, что $\xi(t) = \xi_0/\sqrt{1-t}$ и $\lambda(t) = \lambda_0/\sqrt{1-t}$, то из оценки (4.4) следует, что $j_p(t) = (1-t)^{3/2}j_p$.

4.3 Влияние пиннинга на ВАХ сверхпроводника

Рассмотрим теперь (сначала на качественном уровне) влияние пиннинга на вольт-амперную характеристику сверхпроводника. Напомним, что в отсутствие пиннинга ВАХ была линейной [см. формулу (2.20) и рис. 4.1, прямая 1] из-за реализации режима течения потока. Здесь, однако, необходимо учесть, что при конечной температуре ($T > 0$) тепловое движение может привести к перемещению (крипу, от английского “to creep” – ползти) вихря путем скачков от одного центра пиннинга на другой. В отсутствие движущей силы f_L такие скачки происходят с равной вероятностью во всех направлениях (при хаотическом расположении центров пиннинга), так что средняя скорость ансамбля вихрей равна нулю. Однако для $0 < f_L < f_p$ начинается крип вихрей в направлении движущей силы и тогда появляется диссипация даже при $j < j_c$.

Наличие пиннинга должно так изменять ВАХ, что для $j < j_c$ и $T = 0$ напряжение на образце равно нулю, а для $j > j_c$, когда движущая сила (т. е. сила Лоренца) больше, чем сила пиннинга, появляется конечное напряжение и диссипация. Таким образом пиннинг должен привести к нелинейной ВАХ [см. рис. 4.1, кривая 2].

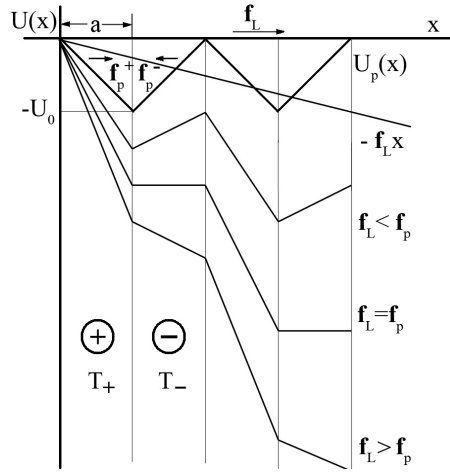


Рис. 4.2. пилообразный потенциал пиннинга $U_p(x)$ и его модификация в присутствии потенциала силы Лоренца $-f_L x$, создаваемого постоянным током.

4.4 Вычисление ВАХ при нулевой температуре

Перейдем теперь к вычислению ВАХ образца в смешанном состоянии для простейшей модели пиннинга вихрей при $T = 0$.

При формулировке модели мы предполагаем, что притяжение вихря к дефекту может быть описано потенциалом пиннинга $U_p(x)$, который для простоты мы будем считать одномерным¹ и периодическим, так что $U_p(x + 2a) = U_p(x)$, где $2a$ – период. Для простоты вычислений функцию $U_p(x)$ удобно выбрать кусочно-линейного вида, изображенного на рисунке 4.2 (так называемый *пилообразный потенциал*), который должен привести к нелинейной ВАХ (см. рис. 4.1).

Элементарная “потенциальная яма” для $U_p(x)$ такого вида состоит из двух половин – в левой направлении силы пиннинга $f_p = -dU_p(x)/dx$ совпадает с направлением оси x , а в правой – противоположно ей. Тогда очевидно, что в отсутствие движущей силы f , которую мы будем считать не зависящей от x (например, силы Лоренца) вихрь локализуется на дне ямы, которому соответствует

¹Одномерность $U_p(x)$ отнюдь не означает одномерности порождающих его дефектов – см. рис. 4.2, где такой потенциал реализуется системой равно отстоящих плоских дефектов (например, двойников в ВТСП или прослоек иной сверхпроводящей фазы с меньшей, чем в исходном материале, критической температурой, или, например, модуляцией толщины сверхпроводящего образца). Дальнейшие примеры систем с периодическим потенциалом пиннинга приведены, например, в [15].

величина потенциала U_0 . Тогда $f_p^\pm = \pm U_0/a$. Пусть теперь в направлении оси x действует постоянная сила f_L , так что дополнительный потенциал, связанный с ней есть $U_f(x) = -f_L x$. Легко видеть, что суммарный потенциал, действующий на вихрь, есть $U(x) = U_p(x) - f_L x$ и с ростом f_L он деформируется таким образом, что сначала исходная яма наклоняется с сохранением положения вихря, а затем при $f_L = |f_p|$ исчезают барьеры для движения вихрей вдоль оси x , т. е. вихрь получает возможность двигаться в направлении движущей силы. Для того чтобы найти ВАХ образца, найдем предварительно *среднюю* скорость вихря V в потенциале $U(x)$. Уравнение движения в этом случае имеет вид

$$\eta \mathbf{V} = \mathbf{f}_p + \mathbf{f}_L. \quad (4.5)$$

Если спроектировать его на ось x , получаем

$$\eta V_\pm = f_L \pm f_p, \quad (4.6)$$

где индексы (\pm) у скорости вихря относятся к левой и правой части потенциальной ямы на рисунке 4.2, а $f_p = U_0/a$. Если T_\pm – время движения вихря на левой и правой части ямы, то

$$V = 2a/(T_+ + T_-) = (f_L/\eta)v_p(f), \quad (4.7)$$

где

$$v_p(f) \equiv \begin{cases} 1 - (f_p/f_L)^2, & (f_L > f_p) \\ 0, & (f_L < f_p). \end{cases} \quad (4.8)$$

Итак, средняя скорость равна произведению двух сомножителей. Первый сомножитель f_L/η в формуле (4.7) соответствует скорости вихрей в режиме течения потока и не зависит от характеристик потенциала пиннинга. Второй сомножитель v_p , который имеет физический смысл *подвижности вихря в потенциале* $U(x)$, является безразмерной функцией отношения (f_L/f_p) , такой что $0 \leq v_p \leq 1$ [см. рис. 4.3(a)].

Для вычисления ВАХ используем, как и в прежних лекциях, формулу (2.18) в виде $E = BV/c$, что дает

$$E = \rho_f j v_p(j_c/j), \quad (4.9)$$

где мы учли, что $f_p/f_L = j_c/j$, если определить $j_c = (c/\Phi_0)f_p = cU_0/a\Phi_0$, а $\rho_f =$

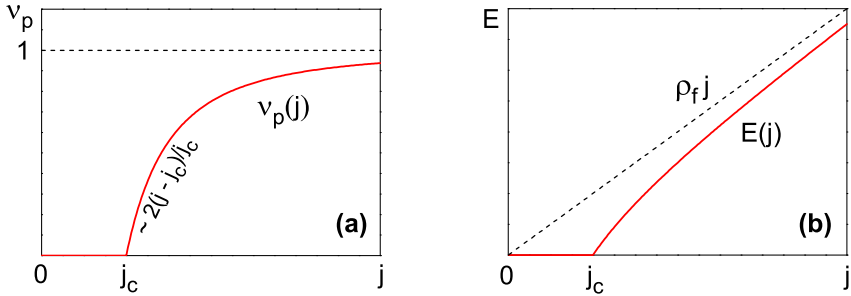


Рис. 4.3. (а) Токовая зависимость подвижности вихря. (б) Продольная ВАХ.

$B\Phi_0/\eta c^2 \approx \rho_n(B/B_{c2})$ (смотри лекцию 2). ВАХ, соответствующая формуле (4.9), изображена на рисунке 4.3(б).

4.5 Влияние температуры на ВАХ. Крип вихрей

Рассмотрим теперь влияние температуры T на ВАХ сверхпроводника в смешанном состоянии. Если при $T = 0$ для $j < j_c$ напряжение на образце равно нулю в силу того, что вихри локализованы на дне потенциальной ямы, то для $T > 0$ из физических соображений очевидно, что теперь возможно преодоление барьеров эффективного потенциала пиннинга за счет термических флуктуаций. Частоту таких термофлуктуационных скачков ω можно представить в виде

$$\omega_{\pm} = \omega_0 \exp(-U_{\pm}/T), \quad (4.10)$$

где индексы (\pm) относятся к прыжкам вихря соответственно против и по направлению движущей силы, U_{\pm} – соответствующие потенциальные барьеры ($U_+ > U_-$), а ω_0 – характерная частота колебаний вихря в невозмущенной ($f_L = 0$) потенциальной яме ($\omega_0 \approx 1/\tau_0 \approx V_0/a \approx f_p/\eta a$). Для того, чтобы оценить величины U_{\pm} , учтем, что $U_+ = U(0) - U(a) = U_0 + af_L$, а $U_- = U(2a) - U(a) = U_0 - af_L$, где мы воспользовались тем, что $U(0) = 0$, $U(a) = U_p(a) - af_L = -U_0 - af_L$ и $U(2a) = U_p(2a) - 2af_L = -2af_L$ (см. рис. 4.2). Среднюю скорость прыжковых перемещений вихря вычисляем как

$$\begin{aligned} V &= (+a)\omega_- + (-a)\omega_+ = a(\omega_- - \omega_+) = \\ &= a\omega_0 e^{-U_0/T} (e^{af_L/T} - e^{-af_L/T}) = 2a\omega_0 e^{-U_0/T} \operatorname{sh}(af_L/T). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Подставляя результат (4.11) в формулу $E = BV/c$, получаем ВАХ

$$E = 2j_c \rho_f \exp(-U_0/T) \operatorname{sh}[(U_0/T)(j/j_c)], \quad (4.12)$$

где мы учли, что $f_p = U_0/a = (\Phi_0/c)j_c$ и $af_L = U_0(j/j_c)$.

Рассмотрим следующие из формулы (4.12) два предельных случая:

1. Если $j \rightarrow 0$, то с учетом того, что для $x \rightarrow 0$ значение $\operatorname{sh} x \approx x$ имеем $E(j \rightarrow 0) \simeq j \rho_{TAFf}$, где $\rho_{TAFf} = \rho_f(2U_0/T) \exp(-U_0/T)$ – удельное сопротивление образца в режиме *термоактивированного течения потока* (TAFf – thermo-activated flux flow). Если $U_0/T \gg 1$, то есть температура (в энергетических единицах) достаточно мала, то $\rho_{TAFf}(T) \ll \rho_f$. Отметим, что в TAFf-режиме отличие сопротивления образца от ρ_f определяется характеристиками потенциала пиннинга, тогда как сопротивление ρ_f в FF-режиме – лишь вязкостью η .

2. Если, однако, $j \sim j_c$ и снова $U_0/T \gg 1$, то для $x \gg 1$ $\operatorname{sh} x \simeq (1/2)e^x$ и тогда $E(j \sim j_c) \simeq \rho_f j_c \exp\{-(U_0/T)[1 - (j/j_c)]\}$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как связаны между собой сила пиннинга вихрей и величина критического тока? Конкуренция каких сил приводит к депиннингу вихря?
2. Поясните качественно разницу ВАХ сверхпроводника в отсутствие пиннинга и при его наличии.
3. Как связана средняя скорость движения вихря со скоростями V_{\pm} вихря в пилообразном потенциале?
4. Нарисуйте графики зависимости мгновенной скорости вихря от времени и от координаты для случаев $j < j_c$ и $j > j_c$.
5. В чем состоит причина появления крипа вихрей в сверхпроводнике?
6. Как оценить характерную частоту “собственных” колебаний вихря в потенциальной яме центра пиннинга?
7. Чем отличаются друг от друга режимы термоактивированного движения вихрей (TAFf) и течения потока (FF)?
8. Какова зависимость $E(j)$ для $j \approx j_c$ при конечной температуре?

Лекция 5

Эффект Холла и направленное движение вихрей

5.1 Общие соображения о влиянии однонаправленных плоских дефектов на резистивные свойства ВТСП

В конце 90-х годов появилось большое число экспериментальных и теоретических работ, исследующих влияние систем однонаправленных плоских дефектов на анизотропию резистивного поведения сверхпроводников в смешанном состоянии. Важность этой проблемы связана с двумя обстоятельствами. Во-первых, в целом ряде высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) в процессе роста кристаллов появляются двойники, ориентированные своей плоскостью параллельно оси c . Если такие двойники являются однонаправленными (т. е. плоскости двойникования параллельны), а транспортный ток j течет в плоскости кристаллических слоев, то, как показывает опыт, продольное и поперечное магнитосопротивления образца во внешнем магнитном поле $\mathbf{H} \parallel c$ существенно зависят от угла α , под которым вектор j пересекает границы двойников. Во-вторых, в слоистых анизотропных ВТСП саму систему параллельных ab -плоскостей можно считать совокупностью однонаправленных плоских дефектов, которые являются источником *собственного* (intrinsic) пиннинга для вихрей, расположенных параллельно ab -плоскостям и подверженных действию силы Лоренца, направленной вдоль оси c . С теоретической точки зрения указанные два случая различаются лишь конкретизацией потенциала пиннинга, так что качественные выводы в обоих случаях должны совпадать. Поэтому мы ниже рассмотрим потенци-

ал пиннинга применительно к задаче о двойниках, так как влияние двойниковых границ на транспортные свойства ВТСП являются предметом пристального внимания исследователей.

Одна из основных причин такого интереса связана с тем надежно установленным фактом, что параметр порядка на двойниках в ВТСП слегка подавлен. Вследствие этого двойниковая граница притягивает вихри и пиннингует их. Соответствующая сила пиннинга, действующая на вихри, направленные вдоль оси c , в силу геометрии задачи перпендикулярна двойникам и, следовательно, ее направление зависит от угла α между вектором \mathbf{j} и направлением двойников. Отсюда следует также, что двойники не должны влиять на динамику вихрей, скорость которых параллельна их плоскости.

Наиболее специфическим проявлением анизотропии пиннинга на двойниках являются эффекты, связанные с направленным движением вихрей вдоль двойников (guiding), когда вихри с большей вероятностью движутся вдоль двойников, чем преодолевают двойниковые барьеры (slipping). При $\alpha \neq 0, \pi/2$ guiding приводит к появлению четной (по отношению к инверсии направления внешнего магнитного поля) компоненты поперечного удельного магнитосопротивления образца ρ_{\perp}^{+} [см. ниже формулы (5.21)], которая обычно значительно превышает по величине известную нечетную холловскую компоненту ρ_{\perp}^{-} .

Следует отметить, что специфика анизотропного пиннинга, порожденного однонаправленными двойниками, не сводится только к представлению об их роли в формировании направленного движения вихрей, но включает в себя и более тонкий вопрос о влиянии двойников на эффект Холла. Здесь можно показать, что для $\alpha \neq 0, \pi/2$ благодаря эффекту Холла возникает новая нечетная компонента продольного магнитосопротивления $\rho_{\parallel}^{-}(\alpha)$.

5.2 Вычисление средней скорости вихря для простейшей модели пиннинга

Рассмотрим теперь простейшую модель, в которой можно достаточно наглядно описать поведение четного и нечетного (по отношению к инверсии $\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{H}$) нелинейных продольного и поперечного магнитосопротивлений $\rho_{\parallel, \perp}^{\pm}$ как функций плотности транспортного тока \mathbf{j} и угла α для случая, когда температура об-

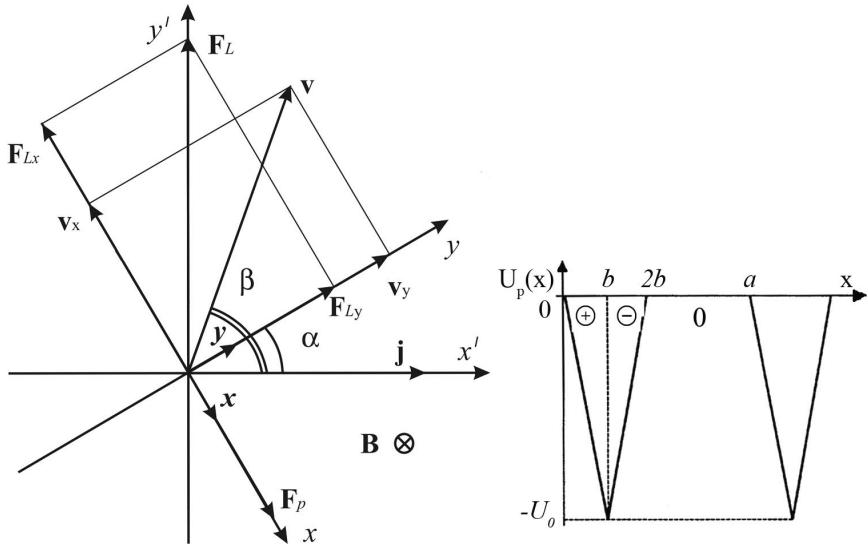


Рис. 5.1. (а) Система координат и диаграмма сил, действующих на вихрь. (б) Модельный потенциал пиннинга типа “стиральной доски”.

разца равна нулю. Последнее обстоятельство позволяет рассматривать задачу о динамике вихря как чисто механическую, которая ввиду простоты выбранного потенциала пиннинга вихрей позволяет решить ее точно.

Для вычисления $\rho_{\parallel, \perp}^{\pm}(j, \alpha, h)$, где h – концентрация двойников, используем ту же схему расчета, которая была описана в лекции 4. А именно, сначала из уравнения движения вихря найдем его среднюю скорость $\langle \mathbf{V} \rangle$ как функцию транспортногo тока и остальных параметров задачи, а затем по формуле (2.18) найдем результирующее электрическое поле \mathbf{E} и величину магнитосопротивлений. Однако, в отличие от лекции 4, здесь мы рассмотрим не одномерную, а *двумерную* (в плоскости xy) динамику вихря, так как направление вектора плотности транспортногo тока \mathbf{j} и двойников в общем случае не совпадают.

Итак, пусть ось x [с ортом \mathbf{x} , см. рис. 5.1(а)] направлена перпендикулярно двойникам, а ось y (с ортом \mathbf{y}) – вдоль двойников. Уравнение движения вихря есть

$$\eta \mathbf{V} + \alpha_H \mathbf{V} \times \mathbf{n} = \mathbf{f} + \mathbf{f}_p \quad (5.1)$$

и отличается от уравнения (4.5) в лекции 4 добавлением холловского слагаемого.

Потенциал пиннинга, как и прежде, зависит только от x , однако теперь это означает, что в y -направлении сила пиннинга равна нулю (т. е. $f_{py} = 0$). Если $2b$ – это ширина потенциальной ямы двойника [см. рис. 5.1(b)], а величина a – период потенциала [то есть $U_p(x+a) = U_p(x)$], то концентрация двойников задается параметром $h \equiv 2b/a$, так что $0 \leq h \leq 1$. Аналитически изображенный на рисунке 5.1(b) потенциал пиннинга типа “стиральной доски” (washboard pinning potential) имеет вид

$$U(x) = \begin{cases} -f_p x, & 0 \leq x \leq b, \\ f_p(x - 2b), & b \leq x \leq 2b, \\ 0, & 2b \leq x \leq a. \end{cases} \quad (5.2)$$

Так как $\mathbf{f}_p = -\nabla U_p \mathbf{x}$, то отсюда следует, что $f_p^+ = f_p$, а $f_p^- = -f_p$, где индексы (\pm) соответствуют левой (+) и правой (–) частям потенциальной ямы (то есть $f_p^\pm = \pm f_p$), а на интервале между ямами сила пиннинга равна нулю ($f_p^0 = 0$). Для вычисления $\langle \mathbf{V} \rangle$ запишем уравнение (5.1) в проекциях на оси координат, учитывая, что

$$\mathbf{V} \times \mathbf{n} = n(\mathbf{V} \times \mathbf{z}) = n(V_x \mathbf{x} + V_y \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = n(-V_x \mathbf{y} + V_y \mathbf{x}). \quad (5.3)$$

Если ввести обозначения $\varepsilon \equiv \alpha_H/\eta$ и $\delta \equiv n\varepsilon$, то из (5.1) следует

$$\begin{cases} V_x + \delta V_y = F/\eta \\ -\delta V_x + V_y = f_y/\eta, \end{cases} \quad (5.4)$$

где $F = f_x \pm f_p$ для x , принадлежащего интервалам (+) и (–) соответственно, а $F = f_x$ для x , принадлежащего интервалу (0). Из (5.4) следует $V_x = (F - \delta f_y)/\tilde{\eta}$, где $\tilde{\eta} = \eta(1 + \delta^2)$; отсюда значения V_x в каждом из интервалов (+), (–), (0) [смотри рисунок 5.1(b)] будут

$$V_x^\pm = (\tilde{f}_x \pm f_p)/\tilde{\eta}, \quad V_x^0 = \tilde{f}_x/\eta, \quad \tilde{f}_x \equiv f_x - \delta f_y. \quad (5.5)$$

Зная значения скорости V_x на каждом из интервалов, легко найти время движения вихря на каждом из них:

$$T_\pm = b/V_x^\pm, \quad T_0 = (a - 2b)/V_x^0, \quad (5.6)$$

а затем, используя (5.5) и (5.6) по формуле $\langle V_x \rangle = a/(T_+ + T_- + T_0)$, вычислить

среднюю скорость вдоль оси x :

$$\langle V_x \rangle = (\tilde{f}_x / \tilde{\eta}) v(j_y, \varepsilon), \quad (5.7)$$

где зависящая от плотности тока j_y , анизотропная эффективная подвижность вихря дается формулой

$$v(\tilde{j}_y, \varepsilon) = [1 - (j_c / \tilde{j}_y)^2] / [1 - (1 - \varepsilon)(j_c / \tilde{j}_y)^2]. \quad (5.8)$$

При вычислении (5.8) мы учли, что $f_p / \tilde{f}_x = j_c / \tilde{j}_y$, где $\tilde{j}_y \equiv j_y + \delta j_x$ и j_c – критическая плотность тока для $\alpha = 0$. Из (5.8) и второго уравнения (5.4) следует, что

$$\langle V_y \rangle = f_y / \eta + \delta \langle V_x \rangle = \{f_y [1 + \delta^2 (1 - v)] + \delta v f_x\} / \tilde{\eta}. \quad (5.9)$$

5.3 Вычисление ВАХ двумерной динамики вихрей

Воспользуемся теперь формулой

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \langle \mathbf{V} \rangle / c \quad (5.10)$$

для того, чтобы вычислить наблюдаемые на опыте продольное E_{\parallel} и поперечное E_{\perp} поля через $\langle V_x \rangle$ и $\langle V_y \rangle$, даваемые формулами (5.7) и (5.9). Предварительно соотношениями $\mathbf{e}_{\parallel} \equiv \mathbf{j} / j$ и $\mathbf{e}_{\perp} \equiv \mathbf{z} \times \mathbf{e}_{\parallel}$ введем систему координат, оси которой параллельны и перпендикулярны вектору плотности транспортного тока \mathbf{j} [см. рис. 5.1(a)]. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\parallel} &= E \cdot \mathbf{e}_{\parallel}, \\ \mathbf{E}_{\perp} &= E \cdot \mathbf{e}_{\perp} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Воспользовавшись теперь тем, что $\mathbf{E} = E_x \mathbf{x} + E_y \mathbf{y}$ и формулой (5.10), легко получить

$$\begin{cases} E_{\parallel} = E_x \sin \alpha + E_y \cos \alpha = (nB/c)(-\langle V_y \rangle \sin \alpha + \langle V_x \rangle \cos \alpha), \\ E_{\perp} = -E_x \cos \alpha + E_y \sin \alpha = (nB/c)(\langle V_y \rangle \cos \alpha + \langle V_x \rangle \sin \alpha). \end{cases} \quad (5.12)$$

Подставляя в (5.12) формулы (5.7) и (5.9), мы получим решение поставленной ранее задачи. Для упрощения его анализа сделаем два приближения: $\varepsilon \ll 1$ и

$\varepsilon = 1$. В этом случае

$$v(\tilde{j}_y) = 1 - (j_c/\tilde{j}_y)^2 \quad (5.13)$$

и

$$\tilde{\eta} = \eta, \quad \langle V_x \rangle \simeq (f_x - \delta f_y)v/\eta, \quad \langle V_y \rangle \simeq (f_y + \delta v f_x)/\eta. \quad (5.14)$$

Учтем еще, что в силу $\mathbf{f} = (\Phi_0/c)\mathbf{j} \times \mathbf{n}$ и равенства $\mathbf{f} = f_x\mathbf{x} + f_y\mathbf{y}$ имеем $f_x = (n\Phi_0/c)j_y$ и $f_y = -(n\Phi_0/c)j_x$, где $j_y = j \cos \alpha$ и $j_x = j \sin \alpha$. Тогда в этих приближениях

$$\begin{aligned} E_{\parallel} &= \rho_f j (\sin^2 \alpha + v \cos^2 \alpha), \\ E_{\perp} &= \rho_f j [\delta v - (1 - v) \sin \alpha \cos \alpha], \end{aligned} \quad (5.15)$$

что можно переписать вводя $\rho_{\parallel} \equiv E_{\parallel}/j$ и $\rho_{\perp} \equiv E_{\perp}/j$, как

$$\begin{aligned} \rho_{\parallel} &= \rho_f (\sin^2 \alpha + v \cos^2 \alpha), \\ \rho_{\perp} &= \rho_f [\delta v - (1 - v) \sin \alpha \cos \alpha], \end{aligned} \quad (5.16)$$

где $\rho_f = B\Phi_0/\eta c^2$ и $v = v(\tilde{j}_y)$ дается формулой (5.13).

Соотношения (5.16) являются основными для дальнейшего анализа. Существенно, что из (5.16) следует зависимость ρ_{\parallel} и ρ_{\perp} от направления вектора магнитного поля \mathbf{B} . Точнее, инверсия поля, то есть замена $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$, благодаря перемене знака $\delta = n\varepsilon$ на противоположный, ведет, в силу соотношения $\tilde{j}_y = j_y + \delta j_x$, к изменению величины функции v и, как следствие, к изменению величин $\rho_{\parallel, \perp}$. Поэтому, чтобы из формул (5.16) извлечь наблюдаемые величины, которые не изменяют своего модуля при замене $n \rightarrow -n$, следует отделить в них четные (индекс $+$) и нечетные (индекс $-$) по отношению к инверсии вектора \mathbf{B} слагаемые. Для этого сначала представим функцию v в виде $v = v^+ + v^-$, где

$$v^{\pm} = [v(n) \pm v(-n)]/2. \quad (5.17)$$

В рассматриваемом нами случае малого эффекта Холла $\varepsilon \ll 1$, выражение для четной v^+ и нечетной v^- составляющих функции $v(j_y + \delta j_x)$ легко получить, разлагая ее в ряд по малому параметру δ :

$$v(j_y + \delta j_x) \approx v(j_y) + v'(j_y)\delta j_x, \quad (5.18)$$

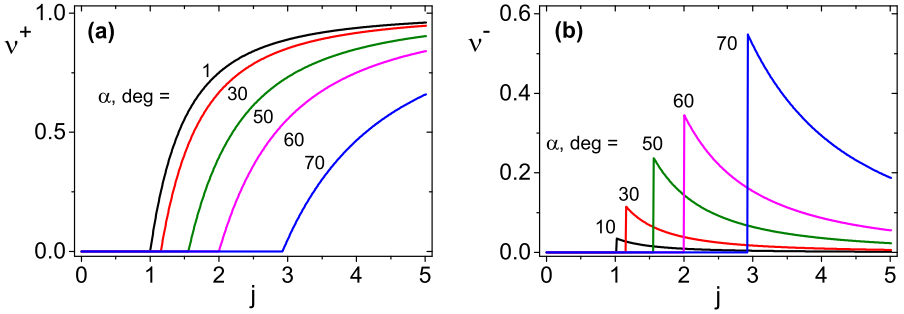


Рис. 5.2. Зависимости $v^+(j)$ (a) и $v^-(j)$ (b) для ряда значений угла α .

откуда следуют формулы

$$v^+ = v(j_y) = 1 - (j_c/j_y)^2, \quad v^- = 2\delta(j_c/j_y)^2 \operatorname{tg} \alpha \quad (5.19)$$

при условии, что $v^+ = v^- = 0$ для $(j_c/j_y)^2 < 1$. Фактически это условие означает, что для $\alpha \neq 0$ можно ввести анизотропный ток кроссовера, совпадающий с критическим током образца при $\alpha = 0$,

$$j_{cr}(\alpha) = j_c / \cos \alpha. \quad (5.20)$$

Заметим, однако, что поскольку формулы (5.18) и (5.19) получены при условии $\varepsilon \operatorname{tg} \alpha \ll 1$, то они не справедливы для $\alpha \rightarrow \pi/2$. Приведем на рисунке 5.2 зависимости $v^\pm(j)$, следующие из формул (5.19).

Отделяя теперь четные и нечетные (по n) компоненты в формулах (5.16), получим в безразмерных (по отношению к ρ_f) единицах:

$$\begin{cases} \rho_{\parallel}^+ = \sin^2 \alpha + v^+ \cos^2 \alpha, \\ \rho_{\parallel}^- = v^- \cos^2 \alpha, \\ \rho_{\perp}^+ = -(1 - v^+) \sin \alpha \cos \alpha, \\ \rho_{\perp}^- = \delta v^+ + v^- \sin \alpha \cos \alpha. \end{cases} \quad (5.21)$$

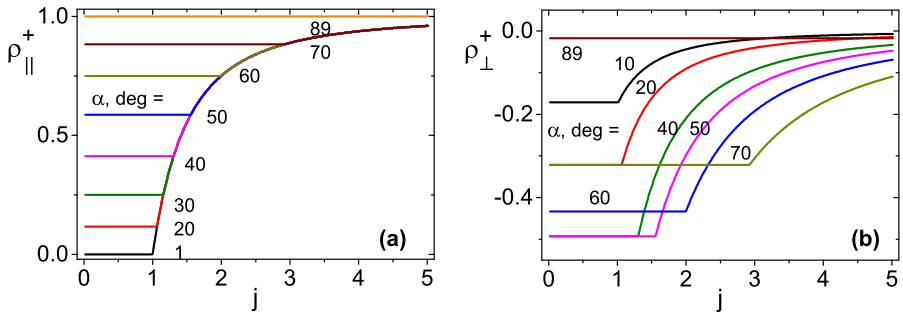


Рис. 5.3. Зависимости (а) $\rho_{\parallel}^+(j)$ и (б) $\rho_{\perp}^+(j)$ для ряда значений угла α .

5.4 Анализ резистивных откликов 2D динамики вихрей

Как следует из (5.21), характер поведения токовых зависимостей $\rho_{\parallel,\perp}^{\pm}(j)$ полностью определяется поведением функции $v^{\pm}(j)$. Линейный предел в формулах (5.21) реализуется в той области токов, где $v^+ = \text{Const}$, а $v^- = 0$, (то есть при $j \rightarrow \infty$), а область нелинейности $\rho_{\parallel,\perp}^{\pm}(j)$ соответствует интервалам нелинейности $v^{\pm}(j)$. Отметим, однако, что нелинейность $\rho_{\parallel,\perp}^{\pm}(\alpha)$ не исчезает даже при весьма больших токах ($j \gg 1$) ввиду анизотропии $j_{cr}(\alpha)$ для $\alpha \rightarrow \pi/2$ [см. формулу (5.20)].

Проиллюстрируем теперь формулы (5.21) для сопротивлений $\rho_{\parallel,\perp}^{\pm}(\alpha, j)$, где функции v^{\pm} даны формулами (5.19). Проведем этот анализ сначала для четных магнитосопротивлений $\rho_{\parallel,\perp}^+$, а лишь затем рассмотрим нечетные резистивные отклики $\rho_{\parallel,\perp}^-$.

Анализ четных откликов

В четных продольном $\rho_{\parallel}^+(j)$ и поперечном $\rho_{\perp}^+(j)$ сопротивлениях при малом эффекте Холла отсутствуют слагаемые, пропорциональные $|\delta| \ll 1$, и входят лишь линейные члены и нелинейные вклады (пропорциональные v^+), описывающие эффект направленного движения вихрей. Предельные значения $\rho_{\parallel}^+(\alpha, j = 0)$, конечные для всех $\alpha \neq 0$, обусловлены направленным движением вихрей вдоль двойников, интенсивность которого растет с ростом α , потому что при этом увеличивается сила Лоренца вдоль двойников [см. рис. 5.3].

Основной вклад в четное поперечное сопротивление ρ_{\perp}^{+} пропорционален множителю $\sin \alpha \cos \alpha$ и, поэтому наиболее благоприятным для его наблюдения является угол $\pi/4$. Токовые зависимости $\rho_{\perp}^{+}(\alpha, j)$ имеют максимальные по модулю значения, равные для дополнительных (до $\pi/2$) углов при $j = 0$, и обращаются в нуль при $j \gg j_c(\alpha)$ вследствие фактической изотропизации динамики вихрей в этом пределе. Действительно, [см. рис. 5.3(b)] специфика анизотропного пиннинга на двойниках вихрей состоит в несовпадении направления внешней движущей силы f_L , действующей на вихрь, и его средней скорости \mathbf{V} (при изотропном пиннинге $\mathbf{F}_L \parallel \mathbf{V}$, если пренебречь эффектом Холла). Отметим здесь, что физически функцию эффективной подвижности вихрей $v(j, \alpha)$ можно рассматривать как нелинейную обратную “пиннинговую” вязкость, определенную инвертированным соотношением (5.7) в форме $\tilde{f}_x = \tilde{\eta}(j_y) \langle V_x \rangle$, где $\tilde{\eta}(j_y) \equiv \tilde{\eta}[v(j_y, \epsilon)]^{-1}$. Анизотропия пиннинговой вязкости вдоль и поперек границ двойников приводит к тому, что при тех значениях j и α , для которых перпендикулярная двойникам компонента скорости вихрей V_x подавлена, проявляется тенденция к существенному преобладанию направленного движения вихрей вдоль двойников (guiding) над движением вихрей *поперек* двойников (slipping).

В эксперименте для описания guiding-эффекта используют функцию

$$\operatorname{ctg} \beta = -\rho_{\perp}^{+}/\rho_{\parallel}^{+} = \frac{1 - v^{+}(j_y)}{\operatorname{tg} \alpha + v^{+}(j_y) \operatorname{ctg} \alpha}, \quad (5.22)$$

где β – угол между векторами средней скорости вихрей \mathbf{V} и плотности тока \mathbf{j} [см. рис. 5.1(a)]. Guiding-эффект выражен тем сильнее, чем больше рассогласование направлений векторов f_L и \mathbf{V} , то есть чем меньше угол β . При этом возможно, что $\operatorname{ctg} \beta \gg 1$, то есть $|\rho_{\perp}| > \rho_{\parallel}$. В случаях, когда $\alpha = 0$ ($\mathbf{j} \parallel \mathbf{y}$) или $\alpha = \pi/2$ ($\mathbf{j} \perp \mathbf{y}$), то есть ток паралелен или перпендикулярен двойникам соответственно, $\beta(\alpha = 0) = \beta(\alpha = \pi/2) = \pi/2$, так как сила Лоренца направлена перпендикулярно или параллельно двойникам.

Рассмотрим токовую зависимость $\operatorname{ctg} \beta(j, \alpha)$ при фиксированных значениях угла $\alpha \neq 0, \pi/2$, для чего воспользуемся тем, что $v^{+} = 1 - (j_{cr}(\alpha)/j)^2$ для $j \geq j_{cr}(\alpha)$ и $v^{+} = 0$ для $j \leq j_{cr}(\alpha)$ [см. формулы (5.17) и рис. 5.2]. Тогда из (5.22) следует, что для $v^{+} = 0$ имеем $\beta = \alpha$, то есть “абсолютный” guiding, а для $v^{+} = 1$ ($j \rightarrow \infty$), что физически соответствует изотропизации пиннинговой вязкости, $\operatorname{ctg} \beta = 0$, то есть $\beta = \pi/2$ и $\mathbf{V} \parallel f_L$. Характерные зависимости $\beta(\alpha)$ при различных значениях

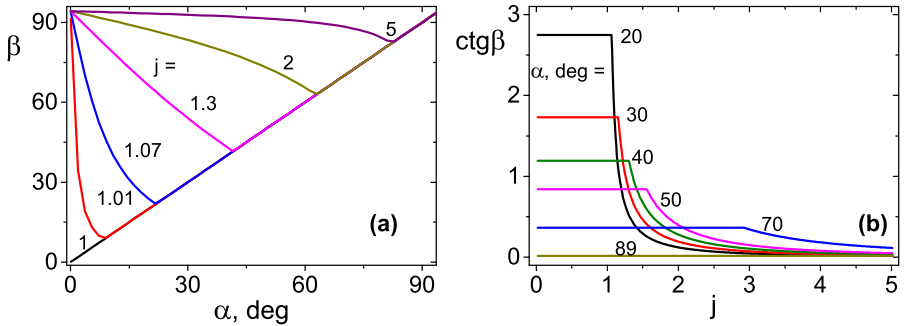


Рис. 5.4. (a) Зависимость $\beta(\alpha)$ для ряда значений безразмерной плотности тока j . (b) Зависимость $\text{ctg } \beta(j)$ для ряда значений угла α .

$j = \text{Const}$ и $\text{ctg } \beta(j)$ для разных значений α , следующие из (5.22), представлены на рисунках 5.4(a) и (b).

Нечетные отклики и взаимовлияние гайдинга и Холл-эффекта

Переходя к анализу нечетных магнитосопротивлений $\rho_{\parallel, \perp}^-(j, \alpha)$, отметим сразу, что, как следует из (5.21), наличие отличного от нуля значения ϵ приводит не только к возникновению холловского вклада в ρ_{\perp}^- за счет четной составляющей v^+ функции v , но и к появлению дополнительного вклада, пропорционального нечетной составляющей v^- , имеющей максимум в области нелинейного перехода от бездиссипативного к FF (flux flow) режиму и практически равной нулю в области вне этого перехода (смотри рис. 5.2). Вследствие этого появляются “перекрестные” эффекты: добавки по v^- к эффектам, обусловленным v^+ , и наоборот – вклады по v^+ к эффектам по v^- . Так, в общем случае не малого ϵ [см. формулы (5.13) и (5.14)], в четных сопротивлениях $\rho_{\parallel, \perp}^+$, помимо основного вклада, порождаемого guiding-эффектом и описываемого v^+ , присутствует холловский вклад, возникающий за счет v^- . В свою очередь, в выражения для нечетных сопротивлений $\rho_{\parallel, \perp}^-$, наряду с холловскими слагаемыми, возникающими за счет v^+ , входят слагаемые содержащие v^- .

Выражения (5.21) (с учетом условия $\epsilon \text{ tg } \alpha \ll 1$) приводят к новому нелинейному анизотропному “скейлинговому” соотношению для холловского сопротив-

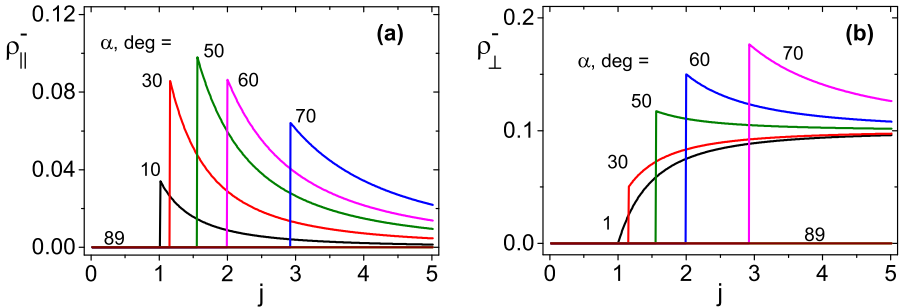


Рис. 5.5. Зависимости (a) $\rho_{\parallel}^{-}(j)$ и (b) $\rho_{\perp}^{-}(j)$ для ряда значений угла α .

ления следующего вида:

$$\delta = \frac{(\rho_{\perp}^{-} - \rho_{\parallel}^{-} \operatorname{tg} \alpha) \cos^2 \alpha}{\rho_{\parallel}^{+} - \sin^2 \alpha}. \quad (5.23)$$

Действительно, из (5.21) следует, что $\rho_{\parallel,\perp}^{\pm}$ выражаются через три величины: v^{+} , v^{-} и δ . Комбинируя ρ_{\perp}^{-} и ρ_{\parallel}^{\pm} , получаем (5.23). Таким образом, холловская вязкость $\varepsilon \ll 1$ однозначно связана с тремя доступными экспериментально наблюдению нелинейными сопротивлениями ρ_{\parallel}^{+} , ρ_{\parallel}^{-} и ρ_{\perp}^{-} , а соотношение (5.23) зависит от угла α . Это соотношение по своему виду существенно отличается от известного степенного скейлинга в случае изотропного пиннинга, когда $\delta = \rho_{\perp}^{-}/(\rho_{\parallel}^{+})^2$. В частном случае, когда $\alpha = 0$, из (5.21) следует, что $\delta = \rho_{\perp}^{-}/(\rho_{\parallel}^{+})$, то есть линейная связь ρ_{\perp}^{-} и ρ_{\parallel}^{+} .

Как было отмечено выше, нечетное продольное ρ_{\parallel}^{-} и нечетное поперечное ρ_{\perp}^{-} сопротивления возникают благодаря эффекту Холла, и поэтому их характерный масштаб пропорционален $\varepsilon \ll 1$ [см. формулы (5.19) и (5.21)]. В токовые зависимости $\rho_{\parallel}^{-}(j, \alpha)$ дает вклад лишь v^{-} , а поэтому их качественный вид определяется поведением v^{-} как функции тока, то есть появляется характерный пик в области нелинейности $j \sim j_c(\alpha)$, исчезающий (вследствие изотропизации пиннинговой вязкости) для $j \gg j_c(\alpha)$ [см. рис. 5.5(a)].

В токовых $\rho_{\perp}^{-}(j, \alpha)$ зависимостях нечетного поперечного сопротивления есть вклады как четной v^{+} так и нечетной v^{-} составляющих функции v , относительная величина которых определяется значениями угла α и константы Холла ε . Так как $v^{-} \sim \varepsilon$ [см. (5.19)], то величина вкладов δv^{+} и v^{-} в формуле для ρ_{\perp}^{-} может

быть одного порядка. Предельные значения токовой зависимости $\rho_{\perp}^{-}(j, \alpha)$ при $j \rightarrow 0, \infty$ определяются соответствующими пределами v^{+} , а вклад v^{-} становится заметным в области ее нелинейности, образуя характерный пик [см. рис. 5.5(b)].

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Объясните причину и особенности пиннинга вихрей на двойниках.
2. В чем состоит основное отличие изотропного и анизотропного пиннинга?
3. В чем причина разделения резистивных откликов на четные и нечетные по отношению к инверсии магнитного поля?
4. Объясните физические причины появления новых резистивных откликов $\rho_{\perp}^{+}(j, \alpha)$ и $\rho_{\parallel}^{-}(j, \alpha)$.
5. Как повлияет конечная температура на ВАХ двумерной динамики вихрей при $T = 0$?
6. Выведите “скейлинговое” соотношение для холловского сопротивления [формула (5.23)].

Лекция 6

Сильный пиннинг

на хаотически расположенных дефектах

6.1 Два сценария реализации пиннинга на случайных дефектах

Как известно, в отсутствие дефектов вихревая решетка (ВР) под действием транспортно́го тока начинает перемещаться, вследствие чего токовое состояние становится диссипативным. Иными словами, критический ток j_c идеальной ВР в отсутствие дефектов равен нулю. Введение точечных центров пиннинга (ЦП) позволяет (при температуре равной нулю) получить конечное, не равное нулю значение j_c , так что для $j < j_c$ реализуется бездиссипативное токовое состояние, а диссипация появляется лишь для $j > j_c$.

Основным внешним параметром, определяющим свойства ВР, является величина индукции $B \approx \Phi_0/a^2$ (где a – расстояние между вихрями), а точнее, соотношение между параметром ВР a и глубиной проникновения λ . Если $a < \lambda$, то взаимодействие между вихрями сильное и ВР достаточно жесткая. В обратном предельном случае ($a > \lambda$) межвихревое взаимодействие слабое, т. е. ВР достаточно “рыхлая” и легко деформируется. Если ВР абсолютно жесткая и распределение ЦП хаотично, то суммарная средняя сила пиннинга единицы объема ВР F_p равна нулю из-за взаимной компенсации элементарных сил пиннинга $f_p(\mathbf{r}_i) = -\nabla_r e_p(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$, поскольку от сдвига ВР ее энергия не изменяется. Если ВР смягчает-

ся, то она начинает деформироваться под действием ЦП и теперь ее смещение на конечное расстояние ($\sim r_p$) требует уже конечной движущей силы, так что $j_c > 0$.

Задачей теории является вычисление величины j_c как функции характеристик ВР (в простейшем подходе – ее упругих модулей) и параметров ЦП (их плотности n_p , интенсивности f_p и радиуса r_p). Будет показано, что *нежесткая ВР пиннингуется всегда*. Однако, в зависимости от соотношения между силами упругости ВР и плотностью и силами ЦП, пиннинг может быть *индивидуальным и сильным* (SP – strong pinning) либо *коллективным и слабым* (CP – collective pinning). В CP-подходе [7] сумма элементарных сил пиннинга равна нулю (Ларкин, Овчинников, 1979), так что сила пиннинга единицы объема F_p обусловлена суммированием флуктуаций элементарных сил пиннинга и поэтому пропорциональна квадрату плотности ЦП. Напротив, первая попытка описать пиннинг ВР восходит к Labusch (1969), который изучал SP-подход [8]. В последнем F_p равна статистической сумме индивидуальных сил пиннинга на каждом дефекте, вследствие чего $F_p \sim n_p$. Если рассматривать появление того или иного сценария как результат конкуренции упругих модулей ВР и сил пиннинга ЦП, то CP-подход соответствует доминированию “жесткости” ВР над интенсивностью f_p , тогда как обратная ситуация провоцирует SP-поведение.

В этой лекции мы займемся анализом сценария сильного пиннинга, тогда как коллективный пиннинг будет обсуждаться в лекции 7.

6.2 Анализ зависимости средней силы пиннинга от координаты вихря

Изучаемая в этом пункте задача состоит в оценке средней максимальной силы, испытываемой ВР со стороны хаотически расположенных точечных ЦП, в зависимости от потенциала пиннинга одного центра и упругих свойств ВР. Для получения такой оценки рассмотрим сначала влияние одного ЦП, расположенного в начале системы координат xuz на регулярную на $z = \pm\infty$ ВР с вихрями вдоль оси z и периодом a вдоль оси x при $y = 0$.

Если зависимость потенциальной энергии вихря вдоль оси x есть $e_p(x)$, то соответствующая сила пиннинга вихря в точке x есть $f_p(x) = -\partial_x e_p(x)$. Под действием этой силы вихрь деформируется так, что его смещение $u(x, z)$ будет мо-

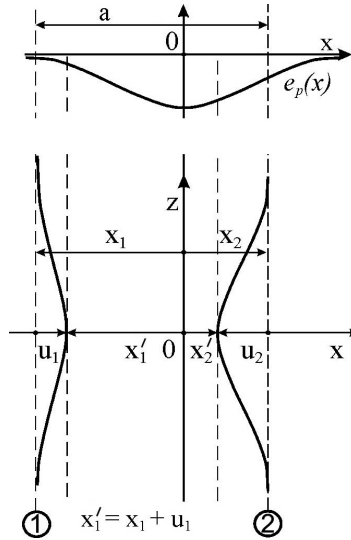


Рис. 6.1. Искривление двух вихрей в присутствии точечного центра пиннинга. Потенциал пиннинга показан в верхней части рисунка.

нотонно возрастать от $u(x, z = \pm\infty) = 0$ до максимального значения $u(x, z = 0)$ при $z = 0$. В нижней части рис. 6.1 в качестве примера изображены два вихря, расположенных по разные стороны от дна потенциальной ямы ($x = 0$). Здесь x_1, x_2 есть координаты этих вихрей на $z = \pm\infty$, x'_1, x'_2 – их координаты для $z = 0$, а u_1, u_2 – соответствующие максимальные смещения от положений равновесия x_1, x_2 . Очевидно, что $x' = x + u$, где $u = u(x)$ и должно определяться из условия минимума суммарной потенциальной энергии ЦП и ВР. Для описания упругих свойств вихря мы примем простейшее приближение – энергия вихря в зависимости от его смещения при $z = 0$ есть $e_u = Cu^2/2$, где жесткость вихря C есть константа, выражаемая через модули упругости ВР подобно тому, как энергия смещения атома в кристаллической решетке на расстояниях значительно меньшие межатомных может быть выражена через модули упругости кристалла. Тогда упругая сила $f_u = -\partial_u e_u$ линейна по смещению вихря и $f_u = -Cu$, т. е. ее вид аналогичен возвращающей силе линейного осциллятора.

Теперь интересующая нас задача сводится к нахождению силы пиннинга как функции x -координаты вихря. Обозначая эту функцию как $f_{pin}(x)$, подчеркнем, что в общем случае, когда $u \neq 0$, $f_{pin}(x)$ и $f_p(x)$ – разные функции своего аргумен-

та, потому что $f_{pin}(x) = f_p(x') = f_p[x+u(x)]$ (см. рис. 6.2). Только в том случае, когда вихрь является абсолютно жестким (т. е. $C \rightarrow \infty$, а $u \rightarrow 0$), $x' \rightarrow x$ и $f_{pin}(x) \rightarrow f_p(x)$; тогда мы возвращаемся к тому, что средняя (по положениям ЦП) сила пиннинга единицы объема ВР для хаотически распределенных ЦП равна нулю.

Для определения же функции $u(x)$ мы воспользуемся тем, что искривленный вихрь будет находиться в равновесии в том случае, если действующие на него упругая сила f_u и сила пиннинга $f_p(x')$ уравновешиваются, т. е.

$$f_p(x+u) = +Cu. \quad (6.1)$$

Подставляя затем решение этого уравнения (в общем случае – нелинейного) $u(x)$ в выражение для $f_p[x+u(x)]$ получим, что

$$f_{pin}(x) = f_p[x+u(x)]. \quad (6.2)$$

Решение уравнения (6.1) может быть проведено аналитически или графически. Мы воспользуемся вторым способом, т. к. в нем не надо конкретизировать детально вид $e_p(x)$. Если в уравнении (6.1) сделать замену переменной $u \rightarrow u-x$, то оно превращается в более удобное уравнение

$$f_p(u) = +C(u-x), \quad (6.3)$$

для графического анализа которого необходимо исследовать поведение точек пересечения графика $-\partial_u e_p(u)$ с различными (по x) положениями секущей этот график прямой $+C(u-x)$. Результаты такого анализа изображены на рис. 6.2(а-е). Рассмотрим эти рисунки последовательно.

На рис. 6.2(а) изображена типичная зависимость $e_p(u) < 0$. Это симметричная относительно оси ординат кривая, имеющая характер “ямы”. Аналитически $e_p(u)$ такого вида может быть описана, например, лоренцианом $e_p(u) = -e_0/[1 + (u/u_0)^2]$ или гауссовой “шапочкой” $e_p(u) = -e_0 \exp[-(u/u_0)^2]$, т. е. четными двухпараметрическими функциями. На рис. 6.2(б) изображена необходимая для графического анализа уравнения (6.3) зависимость силы пиннинга $f_p(u) \equiv \partial_u(-e_p(u))$ от величины u , которая является нечетной функцией u . Зависимость $f_p(u)$ имеет две симметричные относительно начала координат точки перегиба, координаты которых $\pm u_0$ определяются из условия $\partial_u^3 e_p(u) = 0$. Если $K(u) \equiv f'_p(u) = -\partial_u^2 e_p(u)$ есть угловой коэффициент касательной в каждой точке $f_p(u)$, то $K(\pm u_0)$

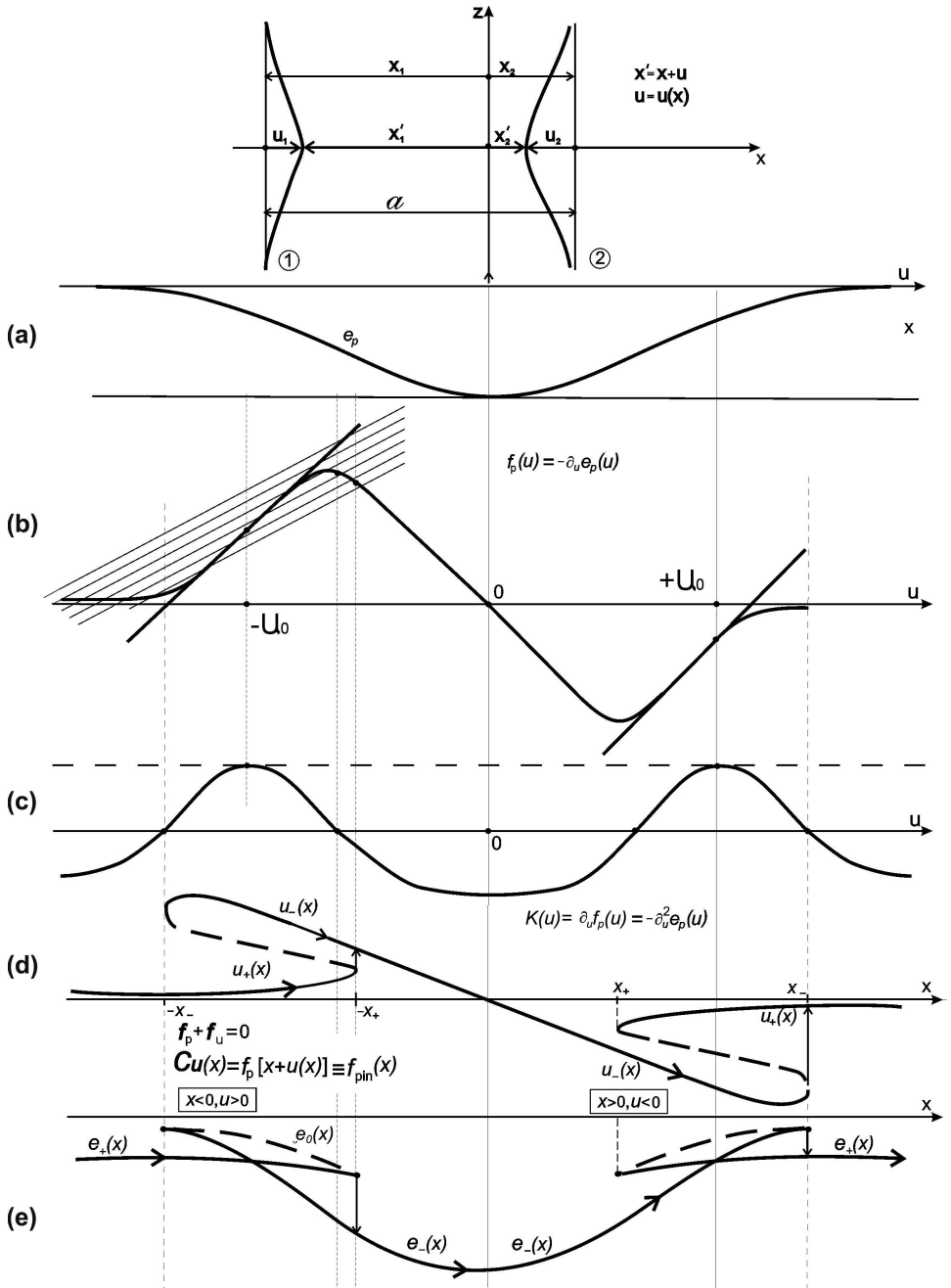


Рис. 6.2. Графический анализ (b) поведения $f_p(u)$, (d) смещения вихря $u(x)$ и (e) энергии вихря $e(x)$.

соответствует максимальным значениям $f_p'(u)$ [см. рис. 6.2(с)]. Как следует из уравнения (6.3), зависимость $u(x)$ может быть построена путем нахождения точек пересечения графиков $f_p(u)$ и прямой $C(u - x)$, положение которой на плоскости рис. 6.2(б) зависит от значений координаты x , в которой эта прямая пересекает ось абсцисс. Существенно, что характер зависимостей $u(x)$, извлекаемых из рис. 6.2(б), существенно определяется соотношением между параметрами C и $K_{max} \equiv K(\pm u_0)$. Именно, если $C > K_{max}$, то $u(x)$ – это однозначная функция x . В случае $C < K_{max}$ $u(x)$ в некотором интервале значений x становится многозначной функцией x [см. рис. 6.2(д), где появляются три ветви $u(x)$]. Из рис. 6.2(б) и 6.2(с) следует, что условием появления многозначных зависимостей $u(x)$ есть равенство $C = K_{max}$, которое называется *критерием Лабуша* (Labusch, 1969). Для $C < K_{max}$ условие $\partial_x f_p(x) = C$ есть уравнение для нахождения величин x_{\pm} , которые являются границами двух симметрично расположенных по отношению к началу координат областей бистабильности [см. рис. 6.2(д)]

$$\begin{aligned} -x_- < x < -x_+ & \quad \text{для } x < 0 \text{ и } u > 0, \\ x_+ < x < x_- & \quad \text{для } x > 0 \text{ и } u < 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Из графика 6.2 в следует, что уменьшение C (т. е. смягчение ВР) ведет к росту ширины областей бистабильности $\Delta x \equiv |x_+ - x_-|$. Отметим, что величина Δx зависит от асимптотик $e_p(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$ – лоренциан [$e_p(x) \sim (x/x_0)^{-2}$] и гауссиан [$e_p \sim \exp[-(x/x_0)^2]$] дадут существенно различные результаты для Δx .

Рассмотрим вычисление средней силы пиннинга $\langle f_{pin}(x) \rangle$, где усреднение по положениям хаотически распределенных ЦП (при неподвижной ВР) можно заменить усреднением $f_{pin}(x)$ по координате x движущегося вихря в системе координат ЦП, т. е.

$$\langle f_{pin} \rangle = \frac{1}{a} \int_0^a f_{pin}(x) dx, \quad (6.5)$$

где $f_{pin}(x) = -\partial_x e_{pin}(x)$, а $e_{pin}(x) = e_p[x + u(x)] + e_u[u(x)]$. Заметим, что в силу многозначности $f_{pin}(x)$ в интервалах $\Delta x = x_- - x_+$ при интегрировании в формуле (6.5) следует указать путь эволюции системы вихрь – ВР при “протаскивании” вихря в положительном или отрицательном направлении оси x [что определяет порядок прохождения “катастроф” $u(x)$]. В соответствии с рис. 6.2(д) на рис. 6.2(е) изображены зависимости функции $e_{pin}(x)$, две устойчивые ветви которой даны сплош-

ными линиями, а одна неустойчивая – пунктиром. Т. к. функция $u(x)$ – нечетная [см. рис. 6.2(d)], то $e_{pin}(x)$ есть четная функция x , т. е. $e_{pin}(x) = e_{pin}(-x)$ [см. рис. 6.2(e)]. Здесь однозначная ветвь e_+ существует лишь в интервалах $(0, -x_+)$ и (x_-, a) , а ветвь e_- – лишь в интервале $(-x_-, x_-)$. Эти интервалы перекрываются в интервалах $(-x_-, -x_+)$ и (x_+, x_-) , внутри которых существует и неустойчивая ветвь $e_0(x)$.

6.3 Многозначные режимы и скачки координат и энергии вихря

Пусть “протаскивание” вихря относительно ЦП происходит в положительном направлении оси x . Тогда в интервале $(0, -x_+)$ мы движемся по устойчивой ветви $e_+(x)$, затем в точке $-x_+$ происходит скачок [с понижением энергии $\Delta e(-x_+) = e_-(-x_+) - e_+(-x_+)$] на ветвь $e_-(x)$ и дальнейшее движение по ней до точки x_- , в которой снова происходит скачок [с понижением энергии $\Delta e(x_-) = e_+(x_-) - e_-(x_-)$] на ветвь $e_+(x)$ с дальнейшим движением по ней до точки $x = a$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle f_{pin} \rangle &= (-1/a) \{ e_+|_0^{-x_+} + e_-|_{-x_+}^{x_-} + e_+|_{x_-}^a \} = \\ &= -(1/a) \{ e_+(-x_+) + e_-(x_-) - e_-(-x_+) - e_+(x_-) \} = \\ &= [\Delta e(-x_+) + \Delta e(x_-)]/a, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где мы учли, что $e_+(0) = e_+(a)$ в силу периодичности ВР. Итак, интегрирование $f_{pin}(x)$ свелось лишь к интегрированию по интервалу многозначности, а последнее сводится к сумме скачков Δe_{pin} , т. к. вне их в силу антисимметрии $f_{pin}(x)$ и периодичности задачи по величине a усреднение $f_{pin}(x)$ дает нуль.

Таким образом, отличная от нуля $\langle f_{pin} \rangle$ появляется лишь на многозначных решениях $u^\pm(x)$, т. е. для $C < K_{max}$ [см. рис. 6.2(c)]. Если же $C > K_{max}$ (т. е. жесткость ВР преобладает), то зависимость $u(x)$, полученная путем решения уравнения (6.3), является однозначной и $\langle f_{pin}(x) \rangle = 0$, т. е. ВР не пиннингуются в рамках теории сильного пиннинга. Это, однако, не исключает другой тип пиннинга, а именно, так называемый коллективный пиннинг (см. лекцию 7).

Перейдем теперь от анализа самосогласованных решений $u^\pm(x)$ со скачками Δe_{pin} в точках “катастроф” $x = \pm x_{+,-}$, к выяснению физической картины их появления. Для этого рассмотрим поведение функции $e_{pin}(x, u) = Cu^2/2 + e_p(x +$

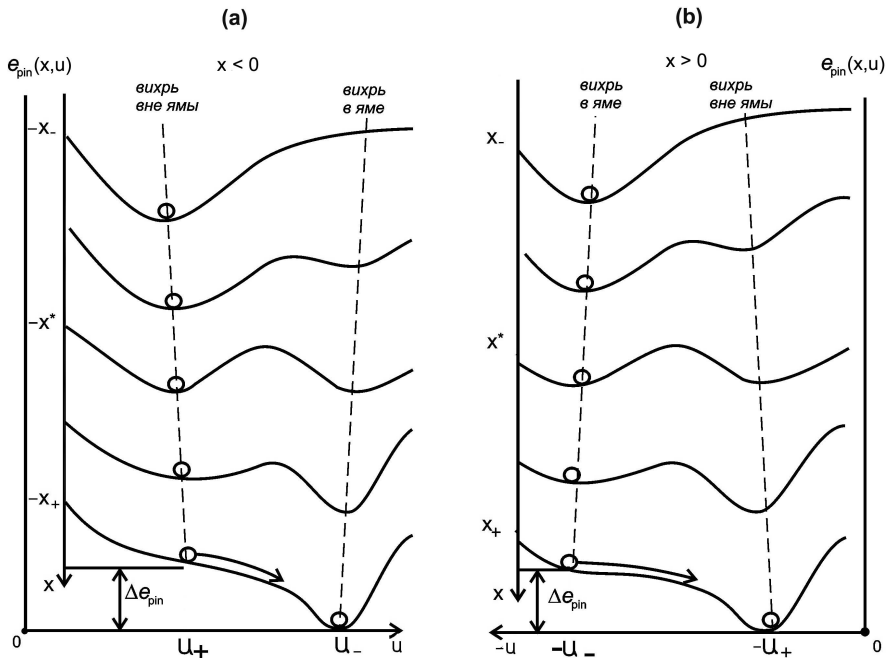


Рис. 6.3. Конкуренция между глубинами минимумов $e_{pin}(u|x)$ внутри интервалов многозначности для (a) $u > 0$ и (b) $u < 0$.

u) не как источника самосогласованных решений $u(x)$ [в результате минимизации $e_{pin}(x, u)$ по u], а как функции u при фиксированном значении x из интервалов $(0, a)$. Физически это означает, что зафиксировав на $z = \pm\infty$ положение ВР, мы “насильственно” изменяем u в интервале $(0, a)$. Функция $e_{pin}(x, u)$ как функция u будет при этом иметь один или два минимума, разделенных максимумом, в зависимости от того, рассматриваем ли мы однозначные или многозначные (по значениям x) ветви соответственно. Таким образом для $-x_- < x < -x_+$ и $x_+ < x < x_-$ с изменением x внутри каждого из интервалов многозначности $u(x)$ происходит конкуренция между глубинами этих двух минимумов – в начале интервала доминирует один, а в конце интервала – другой. В связи с тем, что для $x > 0$ всегда $u < 0$, а для $x < 0$ будет $u > 0$, имеем два типа графиков для $u > 0$ и $u < 0$ [см. рис. 6.3(a) и 6.3(b)].

Рассмотрим, для определенности, зависимость $e_{pin}(u|x)$ для $x < 0$ и $u > 0$ [рис. 6.3(a)]. При $x < -x_-$ $e_{pin}(u)$ – однозначна и имеет один минимум. Для $-x_- <$

$x < -x_+$ зависимости $e_{pin}(u)$ имеют два минимума, разделенных одним максимумом, что соответствует двум устойчивым и одной неустойчивой ветвям $e_{pin}(u)$ и $u(x)$. С ростом x на этой ветви глубина левого стабильного минимума понижается, а правого – возрастает. В точке $x = -x_+$ остается только первый минимум, так что для $x > -x_+$ устойчивой оказывается однозначная ветвь $e_{pin}(u)$ с одним минимумом. Таким образом, с изменением x внутри каждого из интервалов многозначности $e_{pin}(u|x)$ происходит конкуренция между глубинами двух минимумов этой кривой так, что в начале интервала доминирует один, а в конце – другой. Это объясняет процесс “захвата” незапиннигованного вихря потенциальной ямой при переходе от координаты $x < -x_-$ к координате $-x_+$, затем существование “ямного” состояния для $-x_+ < x < x_-$, и, наконец, “удержание” запиннигованного вихря в интервале $x_- < x < x_+$. В точке $x = x_+$ происходит “освобождение” запиннигованного вихря так, что происходит скачок $\Delta e(x_+)$ с уменьшением $u^-(x_+)$ до величины $u^+(x_+)$ и дальнейшей эволюцией $u(x)$ по однозначной ветви u^+ для $x > x_+$.

Закончив качественное описание поведения многозначных ветвей функций $u(x)$ и $e_{pin}(x)$ и соответствующих скачков Δu и Δe на границах интервалов многозначности Δx , перейдем теперь к количественной формулировке, позволяющей вычислить эти скачки и величину интервалов Δx на основе конкретного вида $e_p(x)$ в форме лоренциана:

$$e_p(u) = -e_0 / (1 + u^2 / \xi^2). \quad (6.7)$$

6.4 Вычисление критического тока с использованием теории фазовых переходов Ландау

Выбор математического аппарата для описания перехода от однозначных решений для $u(x)$ и $e_{pin}(x)$ к многозначным определяется возможностью описать такой переход в духе теории Ландау для фазовых переходов второго рода (во внешнем поле). Действительно, конкуренция C и K_{max} [жесткости вихря и максимальный жесткости в точке перегиба $f_p(x)$] определяет появление аналога параметра порядка $\langle f_{pin}(x) \rangle$, который отличен от нуля для многозначных решений (для которых $C < K_{max}$) и равен нулю для однозначных решений с $C > K_{max}$. Ра-

венство $C = K_{max}$ (критерий Лабуша) определяет точку фазового перехода по u , в окрестности которой u_k функция $e_p(x + u(x))$ может быть разложена по малому отклонению от нее $\varphi \equiv x + u - u_k$, где $u_k = \xi$ для $e_p(u)$ в виде (6.8). Тогда

$$\begin{aligned} e_p(x + u) &= e_p(x + u - u_k + u_k) = e_p(u_k + \varphi) \approx \\ &\approx e_p(u_k) + e'_p(u_k)\varphi + e''_p(u_k)\varphi^2/2 + e'''_p(u_k)\varphi^3/6 + e''''_p(u_k)\varphi^4/24 \equiv \\ &\equiv -\varepsilon + v\varphi - (K/2)\varphi^2 + (\alpha/24)\varphi^4. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Здесь $u_k = \xi$ и, вычисляя последовательно производные от $e_p(u)$, имеем $\varepsilon = e_0/2$, $v = e_0/2\xi$, $K = K(u_k) = K_{max} = e_0/2\xi^2$ и $\alpha = 3e_0/\xi^4$. Разложение $Cu^2/2$ легко получить с помощью тождественной замены $u \equiv u + x - x + u_k - u_k = \varphi + (u_k - x)$. Тогда $Cu^2/2 = (C/2)[(u_k - x)^2 - 2(x - u_k)\varphi + \varphi^2]$ и $e_{pin}(\varphi) = Cu^2/2 + e_{pin}(x + u) = (C/2)(x - u_k)^2 - C(x - u_k)\varphi + (C/2)\varphi^2 - \varepsilon + v\varphi - (K/2)\varphi^2 + (\alpha/24)\varphi^4$.

Окончательно

$$e_m(\varphi, h) = e_{pin}[u, x] = (\tau/2)\varphi^2 + (\alpha/24)\varphi^4 - h\varphi, \quad (6.9)$$

где $\tau \equiv C - K$, $h \equiv C(x - u_k - v/C)$, а константа $\tilde{e}_0 = C(x - u_k^2)/2 - e_0/2$ опущена. Соотношение (6.9) отображает энергию $e_{pin}(\varphi)$ на свободную энергию одномерного (изинговского) магнетика в магнитном поле $e_m(\varphi, h)$, если определить параметр порядка как $\varphi \equiv x + u - u_k$, “приведенную” температуру $\tau \equiv (T - T_c)/T_c$ как $\tau \equiv C - K$, и “магнитное поле” $h \equiv C(x - u_k - v/C)$.

Напомним сначала анализ схемы Ландау для магнетика с

$$e_m[\varphi, h] = (\tau/2)\varphi^2 + (\alpha/24)\varphi^4 - h\varphi. \quad (6.10)$$

Уравнение для параметра порядка должно соответствовать устойчивому минимуму $e_{min}[\varphi, h]$. Иными словами, оно следует из условия $\partial e_m/\partial \varphi = 0$, а условие $\partial^2 e_m/\partial \varphi^2 > 0$ дает его устойчивость. Отсюда имеем

$$\tau\varphi + (\alpha/6)\varphi^3 - h = 0 \quad (6.11)$$

при условии, что $\tau + (\alpha/2)\varphi^2 > 0$. Из последнего следует, что при $\tau = 0$ должно быть $\alpha > 0$. Уравнение (6.11) кубическое и его анализ весьма громоздкий. Поэтому рассмотрим сначала случай $h = 0$. Тогда из $\varphi(\tau + (\alpha/6)\varphi^2) = 0$ следует, что если $\tau > 0$, то $\varphi = 0$. Если же $\tau < 0$, то $\varphi_{\pm} = \pm\sqrt{6|\tau|/\alpha}$, т. е. имеет два значения параметра порядка φ_+ и φ_- , реализующих минимум функции

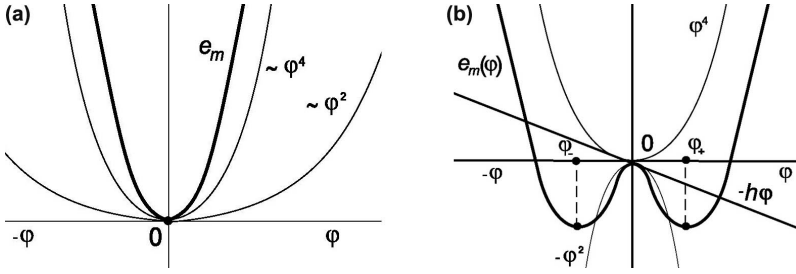


Рис. 6.4. (а) Устойчивый минимум $e_m(\varphi)$ при $\varphi = 0$ для $\tau > 0$. (б) Два симметричных устойчивых минимума $e_m(\varphi)$ при $\varphi = \varphi_{\pm}$ для $\tau < 0$.

$e_m[\varphi, 0] = (\tau/2)\varphi^2 + (\alpha/24)\varphi^4$. Графики $e_m(\varphi, 0)$ для $\tau > 0$ и $\tau < 0$ изображены на рисунках 6.4(а) и 6.4(б).

Вычислим глубину этих минимумов, т. е.

$$\begin{aligned} e_m(\varphi_{\pm}) &= (\tau/2)6|\tau|/\alpha + (\alpha/24)(6|\tau|/\alpha)^2 = \\ &= -3\tau^2/\alpha + 6\tau^2/4\alpha = -(3/2)\tau^2/\alpha. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Тогда высота барьера, разделяющего два этих минимума, равна

$$\Delta e_m = e_m(0) - e_m(\varphi_{\pm}). \quad (6.13)$$

Очевидно, что включение внешнего поля добавляет к кривой $e_m(\varphi, 0)$ еще прямую $-h\varphi$ [рис. 6.4(б)], что приводит к “перекосу” двух (до этого симметричных) минимумов $e_m(\varphi_{\pm}, 0)$ – левый минимум поднимается, а правый – опускается. Легко сделать оценку величины того поля h^* , при котором барьер исчезает

$$h^* \varphi_- \sim \Delta e_m \approx 3\tau^2/2\alpha, \quad (6.14)$$

откуда

$$h^* \approx \Delta e_m / \varphi_- = (3\tau^2/2\alpha)(1/\sqrt{6|\tau|/\alpha}) = |\tau|^{3/2} \sqrt{3/8\alpha}. \quad (6.15)$$

Приведенное выше описание одномерного магнетика может быть соотнесено с нашей задачей о сильном пиннинге следующим образом. *Высокотемпературная фаза* ($\tau > 0$) описывает слабый пиннинг [однозначные $u(x)$ решения]. Два низкотемпературных ($\tau < 0$) состояния могут быть сопоставлены с запин-

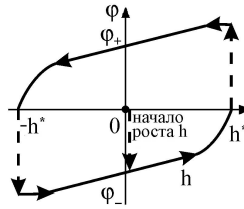


Рис. 6.5. Гистерезис φ при циклировании по h .

нингованным ($\varphi = \varphi_- < 0$) и незапиннигованным состоянием ($\varphi = \varphi_+ > 0$), которые переходят друг в друга путем фазового перехода *первого* рода. Гистерезисное поведение магнетика в плоскости $\varphi(h)$ (см. рис. 6.5) переходит в бистабильный интервал пиннинга, ограниченный координатами $x_{\pm} = u_k + (v \mp h^*)/C$ с $h^* \approx \sqrt{3/8\alpha} |\tau|^{3/2}$.

В точке неустойчивости $x = x_-(h = h^*)$ происходит скачок параметра порядка от запиннигованного состояния $u_- = \varphi_- + u_k - x_-$ к незапиннигованному состоянию $u_+ = \varphi_+ + u_k - x_-$, где $\varphi_{\pm} = \pm \sqrt{6|\tau|/\alpha}$. Вычислим $\Delta e(x > 0) = e_{pin}(u_-, x_-) - e_{pin}(u_+, x_-)$ по формуле (6.10), подставляя туда значения φ_- и φ_+ , что дает

$$e_{pin} = 2h^* \varphi_+ = 3\tau^2/\alpha = (3/\alpha)(C - K)^2. \tag{6.16}$$

Переходя к вычислению $\langle f_{pin}(x, y) \rangle$, можно показать [8], что двумерное обобщение формулы (6.6), вычисленное в предположении вращательной [в плоскости (x, y)] симметрии потенциала пиннинга, есть

$$\langle f_{pin}(x, y) \rangle = -(2x_+/a) \langle f_{pin}(x) \rangle = -2x_+ \Delta e_{pin}/a^2, \tag{6.17}$$

где можно считать $x_+ \approx \xi/2$. Учтем также, что $C \approx \epsilon_0/a$ и $K \approx e_0/2\xi^2$.

Тогда

$$j_c = -cF_{pin}/B = -cn_p \langle f_{pin} \rangle / B = (c/\Phi_0)n_p \xi \Delta e_{pin} = (c\epsilon_0/\Phi_0 \xi)n_p (\xi^2/\epsilon_0) \Delta e_{pin}. \tag{6.18}$$

Вблизи точки фазового перехода по τ можно записать

$$\Delta e_{pin} = (3C^2/\alpha)(1 - K/C)^2 \approx (3\epsilon_0^2/\alpha a^2)[1 - (f_p/f_{Lab})]^2, \tag{6.19}$$

где $f_{Lab} = C\xi$, $f_{pin} = K\xi$, а также можно считать, что $K \approx C$, т. е. $e_0/\xi^2 \approx \epsilon_0/a$. Тогда

$$j_c = j_0 n_p (\xi^4/a) [1 - (f_p/f_{Lab})]^2 = j_0 a \xi^2 n_p (\xi^2/a^2) [f_p/f_{Lab} - 1]^2, \quad (6.20)$$

где $j_0 = c\varepsilon_0/\Phi_0\xi$ есть ток распаривания.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Перечислите основные характеристики точечных центров пиннинга.
2. Объясните, почему абсолютно жесткая вихревая решетка не пиннингуется.
3. Что такое “критерий Лабуша” и каков его физический смысл?
4. Когда появляются скачки координат и энергии вихря?
5. При каких физических условиях можно вычислять критический ток с использованием теории фазовых переходов Ландау?

Лекция 7

Коллективный пиннинг

7.1 Основная идея подхода и оценка j_c при $T = 0$

Лекция 6 была посвящена сильному пиннингу, т. е. случаю, когда *средняя* сила пиннинга на *одном* дефекте $\langle f_{pin}(x) \rangle$ отлична от нуля. Необходимым и достаточным условием реализации такого пиннинга было наличие *многозначности* максимального смещения вихря $u(x)$ в некотором интервале Δx значений координаты данного вихря на $z \rightarrow \infty$. Количественно это эквивалентно условию $f_p > f_{Lab}$, где $f_p = K_{max}\xi$ и $f_{Lab} = C\xi$, а $K_{max} = \max_u \partial_u f_p(u)$.

Если же ситуация обратная, т. е. преобладает жесткость ВР ($f_{Lab} > f_p$), то зависимости $u(x)$ *однозначны* и $\langle f_{pin}(x) \rangle = 0$. И хотя отсюда следует, что сумма всех *индивидуальных* сил пиннинга на центрах пиннинга (ЦП) *единицы объема* ВР равна нулю, т. е.

$$\sum_i \langle f_{pin}(x) \rangle_i = 0, \quad (7.1)$$

это отнюдь не означает, что *полная* сила пиннинга единицы объема ВР равна нулю. Действительно, если суммировать не равные нулю средние силы индивидуального пиннинга, а их флуктуации, пропорциональные *средним квадратам* этих сил f_p^2 , которые уже отличны от нуля за счет флуктуаций плотности дефектов n_p , то средняя сила пиннинга *единицы объема* F_p окажется не равной нулю. Такой пиннинг флуктуационного происхождения называется *коллективным* (CP – collective pinning).

В основе теории коллективного пиннинга (CP-теории) лежит представление

о том, что даже достаточно слабые хаотически расположенные дефекты приводят к исчезновению дальнего порядка в ВР (А. И. Ларкин, 1970). Соответствующая теория [5] позволяет оценить размеры той области ВР (которая называется “корреляционным объемом”), где сохраняется ближний порядок в расположении вихревых нитей. Понятие корреляционного объема V_c является центральным в СР-теории. N_c центров пиннинга в этом объеме ($N_c < n_p V_c$) взаимодействуют с практически невозмущенной (“жесткой”) ВР этого объема и поэтому полная сила пиннинга \mathcal{F}_p в объеме V_c практически исчезает, за исключением ее статистических флуктуаций, пропорциональных $\sqrt{N_c}$. Приравнивая амплитуду этих флуктуаций средней силе пиннинга единицы объема ВР F_p (где $F_p = \mathcal{F}_p/V_c$), для плотности критического тока j_c в СР-теории имеем:

$$j_c B/c = F_p = \mathcal{F}_p/V_c = [\langle (f_i^p)^2 \rangle N_c]^{1/2}/V_c = (\xi/a)[W(0)/V_c]^{1/2}, \quad (7.2)$$

где $W(0) \equiv n_p f_p^2$, $f_p = \langle (f_i^p)^2 \rangle^{1/2}$ и $N_c = N_v(n_p \xi^2 L_c) = (\xi^2/a^2)n_p V_c$, а $N_v = (R_c/a)^2$ – число вихрей в $V_c = R_c^2 L_c$, где R_c , L_c – поперечный и продольный размеры корреляционного объема соответственно.

Здесь f_i^p есть сила, действующая со стороны i -го дефекта на ВР и усреднение производится по всем дефектам, т. е.

$$\langle \dots \rangle = \sum_{i=1}^{N_c} \dots / N_c. \quad (7.3)$$

Следующий важный шаг в оценке j_c состоит в вычислении корреляционного объема V_c через характеристики ВР и ЦП.

Прделаем это сначала для одиночного вихря (т. е. для $a \gg \lambda$) что сводится к определению корреляционной длины вихря L_c . Вычислим сначала силу коллективного пиннинга, действующую на жесткий (т. е. прямолинейный, недеформированный) вихрь длиной L со стороны N_p дефектов в объеме кора вихря $\xi^2 L$. Так как $N_p = n_p \xi^2 L$, то

$$\mathcal{F}_p^2(L) = N_p f_p^2 = n_p \xi^2 L f_p^2 \equiv \gamma L, \quad (7.4)$$

где мы ввели параметр $\gamma \equiv n_p \xi^2 f_p^2$, имеющий смысл *среднеквадратичной силы коллективного пиннинга на единицу длины вихря*. Из формулы (7.4) следует, что $\mathcal{F}_p(L) \sim L^{1/2}$, т. е. $\mathcal{F}_p(L)$ с ростом L возрастает медленнее, чем действующая на вихрь со стороны транспортного тока плотностью j сила Лоренца $\mathcal{F}_L(L) = (\Phi_0/c)jL$.

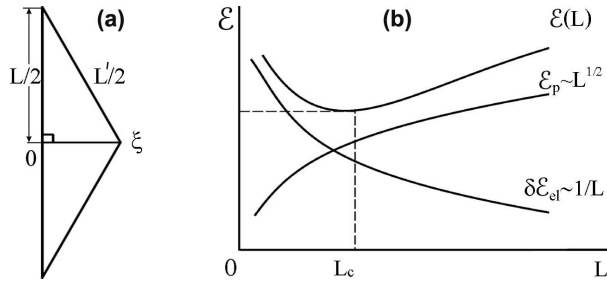


Рис. 7.1. (а) Удлинение вихря при его искривлении. (б) Упругая энергия, энергия пиннинга и суммарная энергия деформированного вихря.

Физически это означает, что достаточно длинный жесткий вихрь *не пиннингуется* при любой конечной плотности тока.

Рассмотрим теперь вопрос о пиннинге не жесткого, а деформируемого вихря. В этом случае с энергией пиннинга вихря $\mathcal{E}_p(L) \simeq \mathcal{F}_p(L)\xi$ начинает конкурировать энергия упругой деформации вихря, которому выгодно понизить энергию взаимодействия с ЦП, увеличив их число за счет деформирования вихря. При этом, однако, возрастает упругая энергия вихря $\mathcal{E}_{el}(L)$, пропорциональная его длине. Равновесной будет такая конфигурация вихря, которая минимизирует сумму его *упругой энергии* \mathcal{E}_{el} и *энергии пиннинга* $\mathcal{E}_p(L)$. Для оценки $\mathcal{E}_{el}(L)$ рассмотрим удлинение вихря за счет перемещения его середины на расстояние $\xi \ll L$ [см. рис. 7.1(а)]. Тогда удлинение вихря

$$\delta L = 2(L'/2 - L/2) = L' - L = 2\sqrt{(L/2)^2 + \xi^2} - L \approx 2\xi^2/L. \quad (7.5)$$

Соответственно, изменение энергии вихря $\delta\mathcal{E}_{el} \approx \varepsilon_0\delta L \approx \varepsilon_0\xi^2/L$, так что с ростом длины вихря $\delta\mathcal{E}_{el} \sim 1/L$. Тогда суммарная энергия деформированного вихря $\mathcal{E}(L) = \mathcal{E}_p(L) + \delta\mathcal{E}_{el}(L)$ будет минимальной при $L = L_c$, где L_c определяется условием $\partial_L\mathcal{E}(L) = 0$ [см. рис. 7.1(б)]. Легко показать, что $L_c \approx (\varepsilon_0^2/n_p f_p^2)^{1/3}$, где $\varepsilon_0 \approx (\Phi_0/4\pi\lambda)^2$. Тогда для энергии пиннинга вихря длиной L_c мы имеем оценку

$$U_c \sim \mathcal{E}_p(L_c) \approx \xi\mathcal{F}_{el}(L_c) \sim \varepsilon_0\xi^2/L_c, \quad (7.6)$$

а для j_c находим оценку из условия $\mathcal{F}_{el}(L_c) \approx \mathcal{F}_L(L_c) = (\Phi_0/c)j_c L_c$. С учетом того,

что $j_0 \sim c\varepsilon_0/\Phi_0\xi$, окончательно имеем

$$j_c \approx j_0(\xi/L_c)^2. \quad (7.7)$$

Из формулы (7.7) следует, что с уменьшением L_c величина j_c растет, и предельное значение L_c есть ξ . Для $L_c \approx \xi$ деформации вихря становятся большими и простая теория упругости отказывает, так что пиннинг становится сильным.

7.2 Крип одиночного вихря для $j \ll j_c$ и $T > 0$

Рассмотрение пункта 7.1 относилось к случаю $T = 0$. Как уже обсуждалось в лекции 4, для $j < j_c$ и $T > 0$ возможен крип вихрей, т. е. их медленное “переползание” в направлении, перпендикулярном транспортному току за счет термофлуктуационного преодоления эффективных (с учетом тока и упругости вихря) потенциальных барьеров пиннинга. Средняя скорость перемещения ВР в этом режиме v имеет термоактивационный характер

$$v = v_0 \exp\{-U(j)/T\}, \quad (7.8)$$

где энергия активации крипа $U(j)$ зависит от величины плотности тока j , а величина v_0 представляет собой скорость диффузии вихрей при $U(j) = 0$. Последнее условие выполняется при $j = j_c$, а при $(j_c - j) \ll j_c$ можно считать обычно, что

$$U(j) \simeq U_c(1 - j/j_c)^\alpha, \quad (7.9)$$

где $U_c \simeq \varepsilon_{el}(L_c) \simeq \varepsilon_0\xi^2/L_c$, а величина α порядка единицы. Из формулы (7.9) следует, что $U(j) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow j_c$ и $U(j) \rightarrow U_c$ при $j \rightarrow 0$. Последнее означает, что при $T > 0$ сопротивление сверхпроводника ρ остается конечным (хотя и $\rho \ll \rho_f$ при $U_c/T \gg 1$) и уже не зависящим от j .

Для истинно сверхпроводящего состояния, т. е. термодинамически равновесного состояния (к которому стремится сверхпроводник при $j \rightarrow 0$), мы должны были бы ожидать, что его удельное сопротивление исчезает при $j \rightarrow 0$, иными словами, реализуется сублинейный по току “стеклоподобный” резистивный отклик ВР. Ниже будет показано, что действительно, при $j \rightarrow 0$ барьеры для крипа $U(j)$ растут алгебраически с уменьшением плотности тока j , т. е.

$$U(j) \simeq U_c(j_c/j)^\mu, \quad (7.10)$$

где $\mu \simeq 1$. Формула (7.10) приводит к сильно субомической ВАХ образца вида

$$V(j) \sim \exp\{-(U_c/T)(j_c/j)^\mu\}. \quad (7.11)$$

Перейдем теперь к соответствующему теоретическому анализу для крипа одиночного вихря в случае $j \ll j_c$. Этот анализ мы начнем с результатов пункта 7.1, где рассматривался случай $T = 0$. Там в рамках СР-подхода была получена характерная корреляционная длина L_c и характерный масштаб поперечных смещений вихря ξ . Приравнивая силу пиннинга на сегменте L_c величине силы Лоренца на нем, мы нашли выражение для j_c [формула (7.7)]. Для $j < j_c$ появляется энергетический барьер $U(j)$, преодоление которого возможно только при учете термических (или квантовых) флуктуаций. Оказывается, что этот барьер может быть уменьшен, если рассмотреть альтернативные метастабильные конфигурации вихря с характерными масштабами длин L_{opt} , больших чем L_c , и поперечных смещений u , больших ξ . Физическая причина такого уменьшения $U(j)$ в том, что такие более протяженные конфигурации обеспечивают больший выигрыш от силы Лоренца, который ограничивается лишь ростом упругой энергии, т. е. сила пиннинга является сублинейной с ростом L и стремится к усреднению для поперечных смещений $u > \xi$.

Можно формализовать изложенные аргументы, если постулировать что конкурирующие метастабильные состояния для вихря длиной L разделены на характерном поперечном масштабе

$$u(L) \sim \xi(L/L_c)^\zeta, \quad (L > L_c) \quad (7.12)$$

и отделены характерными энергетическими масштабами

$$\mathcal{E}(L) \sim U_c(L/L_c)^{2\zeta-1}, \quad (L > L_c). \quad (7.13)$$

Заметим, что (7.13) следует из (7.12) если учесть, что изменение упругой энергии вихря при переходе от одного метастабильного минимума к другому определяется аналогично тому, как это проводилось в пункте 7.1 для $u = \xi$, т. е. по формуле $\mathcal{E}(L) \sim \varepsilon_0 u^2(L)/L$ [и с учетом формулы (7.6) для U_c]. Формулы (7.12) и (7.13) позволяют написать зависимость приращения свободной энергии вихря за счет выброса вихревой петли длиной $L > L_c$ для $j \ll j_c$ как

$$\delta\mathcal{F}(L) \approx U_c(L/L_c)^{2\zeta-1} - j(\Phi_0/c)L\xi(L/L_c)^\zeta = U_c[(L/L_c)^{2\zeta-1} - (j/j_c)(L/L_c)^{\zeta+1}], \quad (7.14)$$

т. к.

$$j(\Phi_0/c)L\xi/U_c = j(\Phi_0\xi L_c/cU_c)(L/L_c), \quad (7.15)$$

а

$$j\Phi_0\xi L_c/(c\varepsilon_0\xi^2/L_c) = j(\Phi_0\xi/c\varepsilon_0)(L_c^2/\xi^2) = j/(j_0(\xi/L_c)^2) = j/j_c. \quad (7.16)$$

Формула (7.14) представляет собой функционал от длины сегмента вихревой нити длиной L , которая играет роль обобщенной координаты. $\delta\mathcal{F}(L)$ является суммой двух слагаемых: медленно растущего с ростом L энергии потенциально-го барьера (1-ое слагаемое) и выигрыша энергии за счет силы Лоренца (2-е слагаемое со знаком минус), которое пропорционально малому параметру $j/j_c \ll 1$, но более быстро растущее с ростом L . Для фиксированного значения плотности тока j барьер может быть преодолен сегментом вихря длиной $L_{opt}(j)$. Величина $L_{opt}(j)$ находится из обычного условия $\partial_L \delta\mathcal{F}_L|_{L=L_{opt}} = 0$, дающего максимум для $\delta\mathcal{F}(L)$. С уменьшением j величины $L_{opt}(j) = L_c(j_c/j)^{1/(2-\zeta)}$ и $U(j) \approx U_c(j_c/j)^\mu$ с $\mu = (2\zeta - 1)/(2 - \zeta)$ возрастают [см. рис. 7.2(a)]. Функционал (7.14) фактически аналогичен тому, который описывает проблему зародышеобразования твердой фазы в переохлажденной метастабильной жидкости за счет тепловых флуктуаций: если зародыш с длиной L меньше, чем некоторая критическая длина L_{opt} , то такая флуктуация твердой фазы рассасывается, и только зародыши с $L > L_{opt}$ остаются стабильными (благодаря пиннингу) и дают вклад в крип вихрей [см. рис. 7.2(b)]. ВАХ такого крипа дается формулой (7.11). Нелинейное увеличение барьера для крипа согласно формуле (7.10) для $j \ll j_c$ наблюдалось экспериментально для ВТСП в целом ряде работ.

В ВАХ, даваемой формулой (7.11), отсутствует слагаемое, ответственное за “обратные” скачки потока в силу того, что величина $\delta\mathcal{F}(L < L_{opt})$ всегда больше нуля для $j \ll j_c$, что наглядно демонстрирует и рис. 7.2(b).

7.3 Упругие модули вихревой решетки

В отсутствие центров пиннинга равновесная ВР является треугольной с характерными расстояниями между вихрями $a \simeq \sqrt{\Phi_0/B}$. Под действием внешних возмущений, создаваемых статическими дефектами появляется двумерное (в плоскости перпендикулярной \mathbf{H}) поле упругих смещений $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r} \equiv (z, \mathbf{R}(x, y))$ и свободная энергия ВР приобретает малую добавку за счет упругих деформаций

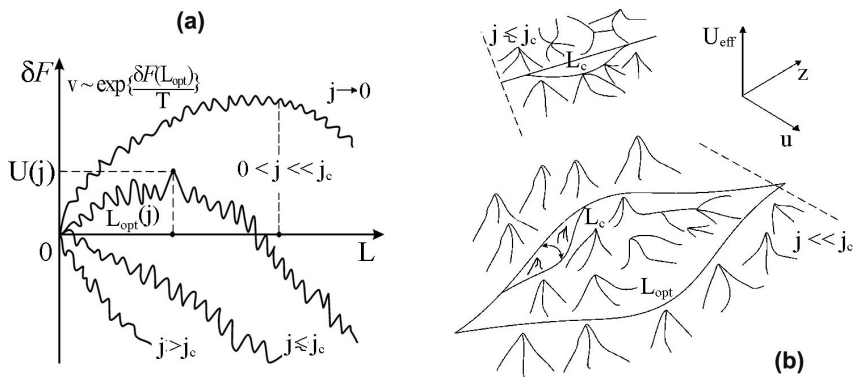


Рис. 7.2. (а) Зависимость функционала свободной энергии $\delta F(L)$. (б) Эффективный ландшафт пиннинга, испытываемый вихрем.

$$\delta \mathcal{F} = 1/2 \int \{ (C_{11} - C_{66})(\nabla \mathbf{u})^2 + C_{66}(\nabla_\alpha u_\beta)^2 + C_{44}(\partial u_\alpha / \partial z)^2 \} dV. \quad (7.17)$$

Заметим, что условием применимости описания (7.17) является *не малость* самих смещений $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, а малость их производных (что позволяет ограничиться квадратичными слагаемыми). Для треугольной ВР только три упругих модуля не равны нулю: модуль *сжатия* $C_1 \equiv C_{11} - C_{66}$, модуль *сдвига* C_{66} , и модуль *изгиба* C_{44} . Под действием деформаций сжатия и изгиба форма ВР не изменяется и свободная энергия деформированной решетки равна свободной энергии недеформированной ВР в перенормированном магнитном поле. Это позволяет вычислить соответствующие модули. Забегая вперед, отметим, что для вычисления j_c в СР-теории достаточно знать лишь два модуля – C_{44} и C_{66} . Модуль $C_1 \equiv C_{11} - C_{66}$ необходим лишь для расчета ВАХ при крипе для режима $j \ll j_c$. Если $a < \lambda$, то вычисления C_{44} в простейшем (бездисперсионном) подходе сводится к расчету относительного удлинения “вихревого цилиндра” [формула (7.5)] длиной (высотой) L и площадью сечения S при его изгибе на величину $u(z)$. В результате оказывается, что $C_{44} \approx BH/4\pi$, т. е. этот модуль равен плотности энергии магнитного поля в веществе. Вычисление C_{66} более трудоемко и сводится в расчету суммарной возвращающей силы, действующей на центральный вихрь в шестигранной ячейке со стороны его ближайших соседей при его смещении вдоль одного из радиальных направлений на расстояниях $x \ll a < \lambda$. Результат такого расчета:

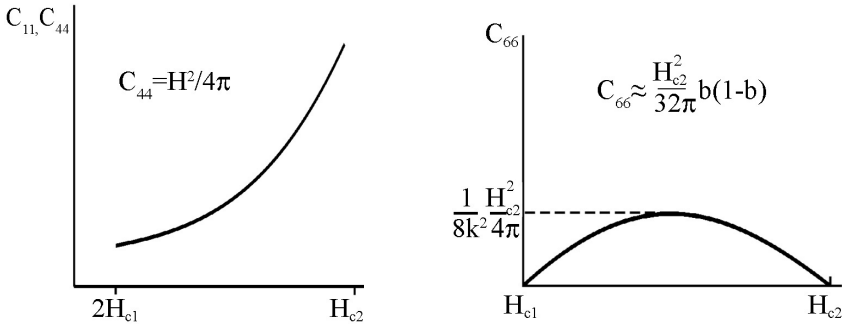


Рис. 7.3. Полевая зависимость упругих модулей вихревой решетки C_{11} , C_{44} и C_{66} .

$C_{66} \approx V\Phi_0/(8\pi\lambda)^2 \sim \epsilon_0/a^2$, где $\epsilon_0 \sim (\Phi_0/4\pi\lambda)^2$ есть энергия вихря на единицу длины. Зависимость C_{44} и C_{66} от V дается формулами [см. также рис. 7.3]:

$$C_{44} = VH/4\pi \sim B^2, \quad C_{66} \approx V\Phi_0/(8\pi\lambda)^2 \approx B^2 a^2/(8\pi\lambda)^2 \sim B^2(a/\lambda)^2. \quad (7.18)$$

Если $b \equiv V/H_{c2} < 1$, то $C_{66} \sim b^2(a/\lambda)^2 \ll C_{44} \sim b^2$. Если же $a \gg \lambda$, то упругие модули C_{11} и C_{66} пропорциональны $\exp(-a/\lambda)$, а C_{44} переходит в выражение для одно-вихревой задачи [4].

7.4 Вычисление корреляционного объема и критического тока в 3D случае (теория Ларкина–Овчинникова)

Отсутствие дальнего порядка из-за наличия слабых ЦП является важным свойством ВР. Именно это свойство отличает ВР от обычного твердого тела, в котором точечные дефекты не нарушают дальний порядок. Это следует из того, что при деформации дефекты перемещаются вместе с атомами твердого тела. Энергия взаимодействия дефектов с решеткой не изменяется при ее однородном перемещении и зависит лишь от величины деформаций решетки. ВР при однородном перемещении не увлекает дефекты атомной структуры. И смещения вихрей, созданное такими дефектами *медленно убывают* с расстоянием от дефекта. На больших расстояниях перемещения ВР от различных дефектов накапливаются и растут с увеличением расстояния, так что дальний порядок разрушается.

Перейдем теперь к оценке величины *корреляционного объема* V_c , т. е. харак-

терных размеров той области, где сохраняется ближний порядок ВР. В силу наличия оси симметрии ВР, совпадающей с направлением магнитного поля, естественно считать, что $V_c \approx L_c R_c^2$, где L_c – характерный продольный, а R_c – поперечный размеры по отношению к направлению магнитного поля. Величины L_c и R_c определяются условием конкуренции упругих энергий деформаций сдвига и изгиба ВР на масштабе размера кора вихря ξ с энергией пиннинга в единицу объема ВР. Последняя равна $\mathcal{F}_p \xi / V_c \approx (\xi/a) \xi f_p \sqrt{n_p / V_c}$. Если вычесть эту энергию, полученную путем деформации ВР за счет наличия ЦП, от положительной энергии упругих деформаций ВР, мы получим результирующее изменение свободной энергии единицы объема при наличии дефектов

$$\delta F = (1/2)C_{66}(\xi/R_c)^2 + (1/2)C_{44}(\xi/L_c)^2 - (\xi/a)f_p \xi \sqrt{n_p/V_c}. \quad (7.19)$$

Минимизируем это выражение, считая что $\delta F = \delta F(R_c, L_c)$ и $d(\delta F) = \partial_{R_c}(\delta F)dR_c + \partial_{L_c}(\delta F)dL_c = 0$ (см. приложение в конце этой лекции).

В результате оказывается:

$$\begin{aligned} L_c &= 2C_{44}C_{66}a^2/n_p f_p^2, \\ R_c &= a^2 \sqrt{2C_{44}C_{66}^3/n_p f_p^2}, \\ V_c &= 4C_{44}^2 C_{66}^4 a^6 / n_p^3 f_p^6. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Формулы (7.20) подтверждают физические соображения в пользу того, что ВР будет более деформированной (т. е. иметь меньший корреляционный объем), если плотность ЦП больше и они сильнее, а также упругие модули меньше. Отметим также, что корреляционный объем вытянут вдоль направления магнитного поля, т. к.

$$L_c/R_c = \sqrt{2C_{44}/C_{66}} = \sqrt{2B^2(8\pi\lambda)^2/4\pi B\Phi_0} \simeq (\lambda/a) > 1, \quad (7.21)$$

и т. к. полученные формулы выводились в пределе $a < \lambda$. Критическая плотность тока может быть получена приравнованием силы Лоренца для единицы объема силе пиннинга $(\xi/a)f_p(n_p/V_c)^{1/2}$, что дает

$$j_c B/c = (\xi/a)n_p^2 f_p^4 / (2C_{44}C_{66}^2 a^3). \quad (7.22)$$

Из формулы (7.22) следует, что смягчение ВР (т. е. уменьшение ее упругих модулей) приведет к росту j_c из-за того, что ВР лучше “подстраивается” путем деформаций вихрей к центрам пиннинга. Так как эти выводы основаны на линейной теории упругости ВР, то они нарушаются, если модули сдвига $C_{66} \rightarrow 0$, как это бывает когда H стремится H_{c1} или H_{c2} [тогда как C_{44} не обращается в нуль при $H \rightarrow H_{c2}$].

Следует также отметить, что “сила пиннинга” в формулах (7.20), (7.22) характеризуется единственным параметром $W \equiv n_p f_p^2$, т. к. СР-теория основана на некогерентном суммировании большого числа ЦП. Тогда L_c и R_c пропорциональны W^{-1} (т. е. $V_c \sim W^{-3}$) согласно (7.20), тогда как $j_c \sim W^2$ согласно (7.22).

7.5 Коллективный пиннинг вихрей для 2D случая

В случае тонкой пленки или слабосвязанных слоев в трехмерном кристалле для поля, перпендикулярного к слоям, аргументы 3D СР-теории должны быть модифицированы, т. к. величина L_c заменяется на толщину пленки (или слоя) d . Соответственно, слагаемое $\sim C_{44}$ в формуле (7.22) должно быть опущено и $V_c = R_c^2 d$. Для оценки единственного параметра задачи R_c приравняем энергию сдвига энергии пиннинга. Это дает $R_c^2 = C_{66}^2 a^2 d / W$. Аналогично тому, как это делалось для 3D случая, для плотности критического тока имеем

$$j_c B / c = \xi W / a^2 d C_{66}. \quad (7.23)$$

Таким образом, в 2D случае $R_c \sim W^{-1/2}$, тогда как $j_c \sim W$. В обоих случаях эти зависимости слабее, чем в 3D случае, где они изменялись как W^{-1} и W^2 соответственно. Полученные здесь результаты надежно подтверждены в экспериментах на Nb_3Ge пленках (Р. Н. Kes, С. С. Tsuei, 1981).

7.6 Заключительные замечания о сильном и коллективном пиннинге

В заключение этой лекции отметим, что рассмотренные в ней и в предыдущей лекции вопросы позволяют кратко сформулировать несколько выводов о природе пиннинга.

Во-первых, пиннинг *отсутствует* в том случае, когда ВР жесткая. Конечная, но *большая* жесткость ($c_{f_{Lab}} > f_p$), приводит только к слабым деформациям ВР и индивидуальные ЦП не могут удерживать ВР в том случае, когда усреднение индивидуальных сил пиннинга дает нуль. Следовательно, пиннинг ВР в этом случае обусловлен лишь флуктуациями сил пиннинга и является коллективным. С уменьшением жесткости ВР появляются эффекты *сильного* пиннинга при условии, что $f_{Lab} < f_p$. В этом случае ЦП пиннируют вихри индивидуально и вместо коллективного появляется сильный пиннинг (линейный по концентрации дефектов n_p). Интересным вопросом для последующего численного анализа в этом случае является важная роль кривизны потенциала ЦП $e''_u < 0$.

Кроссовер между слабым коллективным и сильным индивидуальным пиннингом может быть реализован экспериментально: рост магнитного поля до величины второго критического поля H_{c2} ведет к значительному смягчению упругих модулей. Такое смягчение упругих модулей влечет за собой уменьшение силы Лабуша f_{Lab} , реализуя кроссовер от слабого к сильному пиннингу в виде хорошо известного экспериментально *пик-эффекта* в критической плотности тока.

Во-вторых, важным результатом является возможность интерпретации сценария коллективного пиннинга в терминах картины сильного пиннинга. Действительно, суммирование по конкурирующим ЦП в области корреляционного объема V_c дает соответствующую критическую силу Лабуша. Количественно, мы сравниваем градиент силы $f' \sim [n_p(\xi^2/a^2)V]^{1/2}f_p/\xi$, накопленный в анизотропном объеме $V = LR^2 \simeq (\lambda/a)R^3$, с упругим параметром $C(R) = \epsilon_0\lambda R/a^3$ для плавных деформаций ВР на масштабе $R > \lambda$ (бездисперсионный режим) и используем критерий Лабуша $C = K_{max}$. Отсюда мы находим масштаб $R_c = \lambda f_{Lab}^2 / f_p^2 n_p a \xi^2$, на котором происходит компенсация сил пиннинга и упругих сил ВР. Как видно, эта длина согласуется с характерной длиной коллективного пиннинга в бездисперсионном 3D режиме. Следующие из этой картины бистабильные решения соответствуют альтернативным положениям рельефа потенциала пиннинга, которые может выбирать корреляционный объем на масштабах, больших R_c .

Приложение к лекции 7

Минимизация $\delta F(R, L) = (1/2)C_{66}(\xi/R)^2 + (1/2)C_{44}(\xi/L)^2 - (\xi/a)f_p\xi\sqrt{n_p/LR^2}$.

1. Введем компактные обозначения:

$$C_{66} \equiv \alpha, \quad C_{44} \equiv \beta, \quad \gamma \equiv \sqrt{n_p f_p^2 \xi / a^2}, \quad x \equiv \xi/R, \quad y \equiv \xi/L,$$

$$f_p \xi \sqrt{n_p/LR^2} = \sqrt{(n_p f_p^2 / \xi)(\xi^3/LR^2)} = \sqrt{n_p f_p^2 / \xi} x \sqrt{y} \equiv \gamma x \sqrt{y},$$

тогда $\delta F(x, y) = (1/2)\alpha x^2 + (1/2)\beta y^2 - \gamma x \sqrt{y}$.

2. Вычислим дифференциал от $\delta F(x, y)$

$$d(\delta F) = \alpha x dx + \beta y dy - \gamma [dx \sqrt{y} + (x/2\sqrt{y}) dy] = \underbrace{(\alpha x - \gamma \sqrt{y})}_{=0} dx + \underbrace{(\beta y - \gamma x/2\sqrt{y})}_{=0} dy$$

3. Тогда

$$\begin{cases} \alpha x - \gamma \sqrt{y} = 0 \\ \beta y - \gamma x/2\sqrt{y} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha x = \gamma \sqrt{y} \\ \gamma x = 2\beta (\sqrt{y})^3 \end{cases} \quad \gamma x = 2\beta (\alpha x / \gamma)^3$$

или разделим

$$\alpha/\gamma = \gamma/2\beta y \rightarrow y 2\alpha\beta = \gamma^2;$$

$$\boxed{y = \gamma^2 / 2\alpha\beta}$$

тогда

$$x = (\gamma/\alpha)\sqrt{y} = \gamma/\alpha(\gamma/\sqrt{2\alpha\beta}) = \gamma^2/\sqrt{2\alpha^3\beta};$$

$$\boxed{x = \gamma^2 / \sqrt{2\alpha^3\beta}}$$

$$yx^2 \equiv \xi^3/R^2 L = (\gamma^2/2\alpha\beta)(\gamma^4/2\alpha^3\beta) = \gamma^6/4\alpha^4\beta^2.$$

$$\boxed{V_c = 4\alpha^4\beta^2\xi^3/\gamma^6}$$

4. Отсюда $L_c/R_c = x/y = (1/\sqrt{2\alpha^3\beta})2\alpha\beta = \sqrt{2\beta/\alpha} = \sqrt{2C_{44}/C_{66}} \gg 1$

$$V_c = 4C_{66}^4 C_{44}^2 \xi^3 a^6 / (n_p f_p^2 \xi)^3 = 4C_{66}^4 C_{44}^2 a^6 / (n_p f_p^2)^3.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Объясните основную идею теории коллективного пиннинга.
2. Почему $N_c < nV_c$ (стр. 74)?
3. Из каких соображений находится корреляционная длина одиночного вихря в СР-подходе?
4. В чем состоит физическая причина появления метастабильных конфигураций вихря при $T > 0$?
5. Почему в обычном кристалле точечные дефекты не нарушают дальний порядок, а в вихревой решетке – разрушают его?
6. Почему модуль сдвига C_{66} обращается в нуль при $H \rightarrow H_{c1}, H_{c2}$?
7. Как изменяются R_c и L_c с ростом магнитного поля?
8. Как интерпретировать коллективный пиннинг в терминах сильного пиннинга?

Лекция 8

Равновесная анизотропия пиннинга вихрей на однонаправленных двойниках в YBCO и ее резистивные измерения

8.1 Эксперименты аргоннской группы по пиннингу вихрей на двойниках

В лекции 5 уже обсуждалась задача о пиннинге вихрей на однонаправленных двойниках применительно к вопросу о направленном движении вихрей (guiding) вдоль двойников в кристаллах YBCO в том случае, когда транспортный ток течет вдоль слоев, а внешнее поле (и вихри) направлены перпендикулярно слоям, т. е. вдоль оси кристалла.

Однако исторически первыми резистивными экспериментами, продемонстрировавшими анизотропию пиннинга вихрей на двойниках в YBCO были опыты в другой геометрии, когда внешнее магнитное поле (и вихри) лежали в плоскости слоев и измерялась угловая зависимость продольного магнитосопротивления при вращении поля относительно направления тока (Kwok *et al.*, 1991). Сначала мы расскажем об этих работах и их теоретической интерпретации (Blatter *et al.*, 1991), а затем о последующем развитии этой тематики в экспериментальных и теоретических работах на кафедре физики низких температур (1994–1996 гг.).

В упомянутых экспериментах аргоннской группы [16] использовались кри-

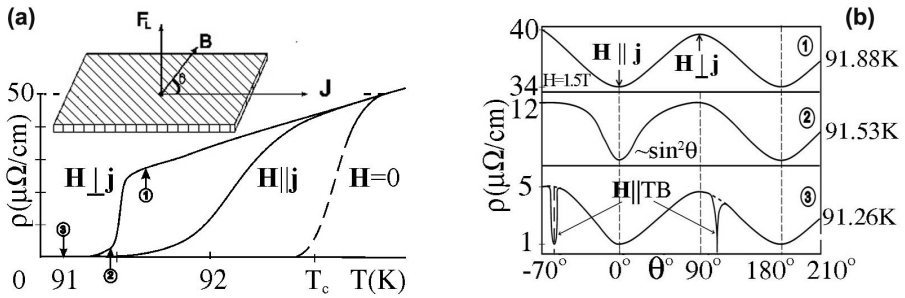


Рис. 8.1. (a) Температурная и (b) угловая зависимость сопротивления кристалла YBCO в работе Kwok *et al.* [16].

сталлы YBCO с однонаправленными двойниками, расположенными под углом 45° по отношению к направлению транспортного тока [рис. 8.1(a)]. На основной части этого рисунка изображена температурная зависимость сопротивления образца в случаях $\mathbf{H} \parallel \mathbf{j}$, $\mathbf{H} \perp \mathbf{j}$ и $\mathbf{H} = 0$.

В нулевом поле резистивный переход имеет максимальную крутизну с температурой средней точки $T_c \approx 92.5$ К и шириной $\Delta T_c(10\% - 90\%) < 200$ мК. Включение магнитного поля ведет к широкому резистивному переходу даже в случае бессиловой конфигурации тока и поля ($\mathbf{H} \parallel \mathbf{j}$), как уже отмечалось в ряде более ранних работ. Происхождение механизмов диссипации в этом случае является предметом дискуссий: *обрыв вихрей* (flux cutting), их *перепутывание* (flux entanglement), флуктуации, джозефсоновские контакты могли быть источниками диссипации для $\mathbf{H} \parallel \mathbf{j}$. В случае же $\mathbf{H} \perp \mathbf{j}$ наблюдаемая диссипация значительно больше. Избыточная резистивность между $\mathbf{H} \perp \mathbf{j}$ и $\mathbf{H} \parallel \mathbf{j}$ конфигурациями [указанных вертикальными стрелками на рис. 8.1(b)] может быть объяснена течением потока вихрей под действием силы Лоренца. Действительно, если $\mathbf{E} = (\mathbf{V} \times \mathbf{V})/c$, а скорость вихря в режиме течения вихрей удовлетворяет условию

$$\eta \mathbf{V} = (\Phi_0/c) \mathbf{j} \times \mathbf{n}, \quad (8.1)$$

где \mathbf{n} есть единичный вектор направления магнитного поля ($\mathbf{B} = B\mathbf{n}$ и $B \equiv |\mathbf{B}|$), то для продольного сопротивления образца с учетом $E_{\parallel} = (\mathbf{E}\mathbf{j})/j$ имеем

$$\mathbf{E} = (B\mathbf{n}/c) \times \mathbf{V} = (B\Phi_0/\eta c^2) \mathbf{n} \times \mathbf{j} \times \mathbf{n} = \rho_f \{ \mathbf{j} - \mathbf{n}(\mathbf{j}\mathbf{n}) \}. \quad (8.2)$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{B}), \quad (8.3)$$

а $\rho_f \equiv V\Phi_0/\eta c^2$. Тогда

$$E_{\parallel}(\theta) = (\mathbf{E}\mathbf{j})/j = \rho_f(j^2 - j^2 \cos^2 \theta)/j = \rho_f(j - j \cos^2 \theta) = \rho_f(\theta)j. \quad (8.4)$$

Вычисляя затем зависящее от угла θ продольное магнитосопротивление образца в режиме течения потока (flux flow) $\rho_f(\theta)$, получим

$$\rho_f(\theta) \equiv \rho_f \sin^2 \theta. \quad (8.5)$$

Отметим, что, как следует из формулы (8.5), ρ_θ – это периодическая функция θ с периодом π [см. рис. 8.1(b)]. С уменьшением температуры не зависящий от угла θ резистивный фон сильно уменьшается [см. рис. 8.1(a)], так что при самых низких температурах остается [см. рис. 8.1(b)] с одной стороны, практически режим вида (8.5), а с другой стороны, на его фоне появляются резкие провалы (практически до $\rho \approx 0$) при $\theta = 45^\circ$ от $\mathbf{H} \perp \mathbf{j}$ направления, повторяющиеся через каждые 180° , т. е. для направлений, когда \mathbf{H} параллельно плоскости двойников ($\mathbf{H} \parallel \text{TB}$, TB – twin boundary). Ширина провала $\rho(\theta \approx 45^\circ)$ в этих опытах была очень узкой $\approx \pm 2^\circ$, что, возможно, было связано с инструментальным разрешением зависимости $\rho(\theta)$. Авторы этой статьи высказали предположение, что резкое падение магнитосопротивления $\rho(\theta)$ для $\theta = 45^\circ, 225^\circ$ может быть связано с пиннингом вихрей на двойниках вдоль всей их длины в отличие от случая, когда пиннинг вихрей осуществляется локально для вихрей при $\mathbf{H} \parallel \text{TB}$.

8.2 Критический угол при пиннинге вихрей на двойниках

Теоретический анализ этой идеи был предложен в работе Blatter *et al.* [17], где была проанализирована простая модель для равновесной конфигурации вихревой нити на системе однонаправленных двойников для случая, когда направление магнитного поля не параллельно плоскостям двойникования (рис. 8.2).

Пусть расстояние между плоскостями двойникования есть d и внешнее магнитное поле направлено под углом θ к двойникам. Вследствие того, что параметр порядка на двойниках в YBCO подавлен, двойник притягивает вихрь и каж-

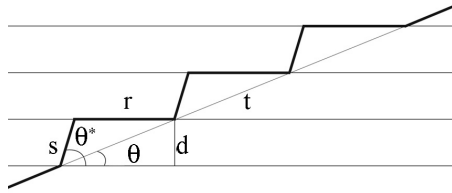


Рис. 8.2. Равновесная конфигурация вихревой нити на системе однонаправленных двойников.

дый вихрь стремится деформироваться таким образом, чтобы максимальную часть своей длины r проходила по двойнику. Такой деформированный вихрь только в среднем направлен вдоль поля. Для вычисления зависимости $r(\theta)$ мы примем, что часть вихря между двойниками длиной s обладает энергией на единицу длины $\varepsilon = (\Phi_0/4\pi\lambda)^2$. Для вихря на двойниках эта энергия меньше на величину $\delta\varepsilon \ll \varepsilon$. Тогда изменение энергии вихря за счет его деформации на одном периоде будет

$$\delta E(r, \theta) = \varepsilon s + (\varepsilon - \delta\varepsilon)r - \varepsilon t = \varepsilon(s + r - t) - \delta\varepsilon r. \quad (8.6)$$

Конфигурация с минимальной энергией для вихря находится путем минимизации $\delta E(r, \theta)$ по r (при фиксированном θ). Для этого надо выразить s через r и $t = d/\sin\theta$ по теореме косинусов и продифференцировать δE по r , а затем из условия $d\delta E/dr = 0$ найти $r(\theta)$. Воспользовавшись тем, что $\delta\varepsilon/\varepsilon \ll 1$ и $\sin\theta \approx \theta$ для $\theta \ll 1$, мы получим

$$r \simeq d[1/\theta - \sqrt{\varepsilon/2\delta\varepsilon}]. \quad (8.7)$$

Если определить θ^* как тот предельный угол, для которого $r = 0$, то из (8.7) получим

$$r \simeq d(1/\theta - 1/\theta^*), \quad (8.8)$$

где $\theta^* \equiv \sqrt{2\delta\varepsilon/\varepsilon} \ll 1$.

Подставляя затем (8.8) в (8.6) имеем

$$\delta E(\theta) \simeq -(\varepsilon d/2\theta)(\theta^* - \theta)^2, \quad (8.9)$$

что дает понижение энергии вихря длиной t при его деформировании с образо-

ванием отрезков s и r . В пределе $\theta \rightarrow 0$ из (8.9) следует, что $\delta E(\theta \rightarrow 0)/t = -\delta\epsilon$, как и следовало ожидать для вихря, расположенного на двойнике.

Из (8.9) и (8.8) следует, что с уменьшением θ величина r растет $\sim 1/\theta$, т. е. все большая часть вихря расположена на двойнике. Тогда появление провалов на зависимости $\rho(\theta)$ для $|\theta| < \theta^*$ можно объяснить тем, что сила пиннинга на единицу длины вихря на двойнике значительно больше, чем для вихря, направленного перпендикулярно двойникам. Действительно, в статье Kwok *et al.* [16] было показано путем Аррениусовского анализа температурных зависимостей $\rho(T, \theta)$ для $\mathbf{H} \parallel \text{ТВ}$ и $\mathbf{H} \perp \text{ТВ}$ конфигураций вихрей, что потенциал их пиннинга для первой примерно в пять раз больше, чем для второй. Причиной существования более сильного пиннинга на двойниках может быть как большая концентрация на них точечных дефектов (для которых двойники являются стоками в процессе отжига YBCO), так и большая неоднородность двойников как дефектов кристаллической структуры.

Изложенные выше экспериментальные и теоретические результаты описывают прежде всего “термодинамический” аспект задачи о равновесной структуре деформированной вихревой нити при ее частичном пиннинге на периодической двойниковой структуре в $\mathbf{H} \perp$ с геометрии эксперимента. Величина критического угла θ^* , как основной результат этого расчета, определяет равновесную структуру вихря для $|\theta| < \theta^*$, так как отношение длины r сегмента вихря, принадлежащему двойнику, к длине сегмента s вне двойника дается формулой

$$(r/s) = 1 - |\theta|/\theta^*, \quad (8.10)$$

которая следует из (8.8).

8.3 Угловая зависимость $j_c(\alpha)$ при пиннинге на двойниках

Обратимся теперь к другому, “кинетическому” аспекту рассматриваемой задачи, связанному с анализом резистивного поведения деформированных вихрей (для $|\theta| < \theta^*$), т. е. определения угловой зависимости критического тока и крипа при $B = \text{Const}$ и $T = \text{Const}$ в указанной выше геометрии.

Такая задача возникла в связи с тем, что при повторении экспериментов аргоннской группы в нашей лаборатории оказалось [18], что величина θ^* зна-

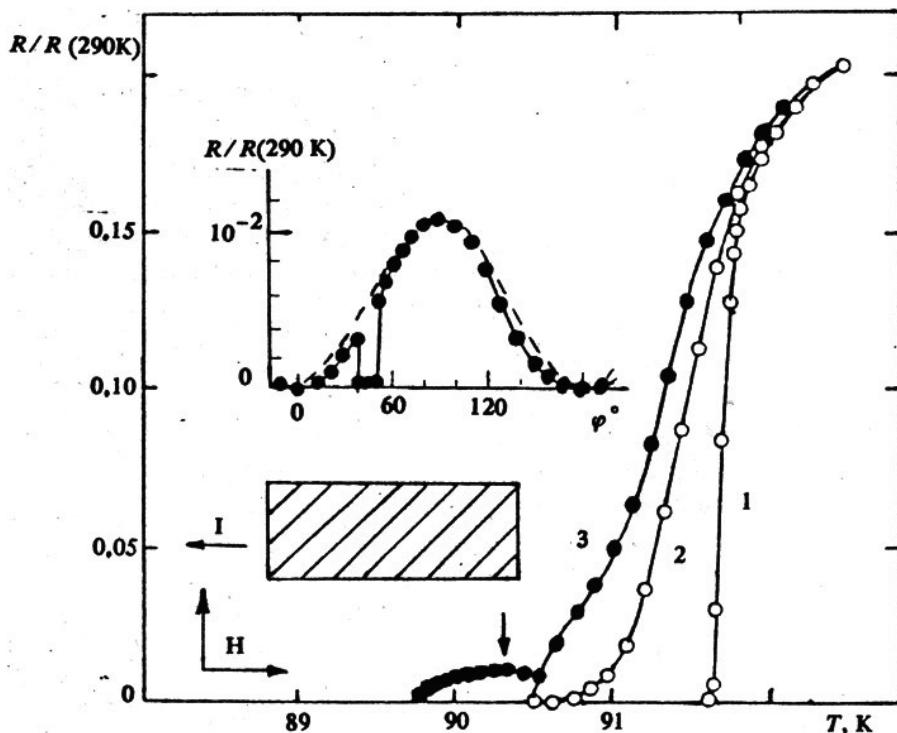


Рис. 8.3. Зависимость $R(T)$ вблизи T_c для $H = 0$ (1) и $H = 15 \text{ kOe}$ при $H \parallel c$ (2) и $H \perp c$ (3). Взаимная ориентация границ двойников и граней монокристаллов (так же, как векторов \mathbf{H} и \mathbf{I}) показана на нижней вставке. Зависимость $R(\phi)$ в области резистивного “хвоста”, отмеченная стрелкой на основном рисунке, показана на верхней вставке.

чительно больше ($\sim 10^\circ$), чем в экспериментах Kwok *et al.* В условиях большей разрешающей способности угловых измерений ($\sim 0.3^\circ$), это позволило изучить вольт-угловые характеристики образцов для $|\theta| < \theta^*$ при различных токах (см. рис. 8.3) и определить из них угловые зависимости критического тока $J_c(\theta)$ и крипа $\rho_{cr}(\theta, j)$.

Рассмотрим сначала эти зависимости теоретически в рамках описанной выше (см. рис. 8.2) модели. Пусть f_{\parallel} и f_{\perp} есть силы пиннинга (на единицу длины вихря) для вихрей, расположенных соответственно параллельно и перпендикулярно двойникам. Если $f_{p\theta}$ есть средняя сила пиннинга, действующая на вихрь, направленный (в среднем) под углом $\theta < \theta^*$ по отношению к плоскости двой-

никования, то

$$f_{p\theta} = (rf_{\parallel} + sf_{\perp})/(r + s), \quad (8.11)$$

где соответствующие отрезки вихря $r \approx d/\theta^*$ и $s \approx d(1/\theta - 1/\theta^*)$ (для $\theta^* \ll 1$) изображены на рис. 8.2. Вычисление средней силы Лоренца, действующей на эти же отрезки вихря, производится аналогично и дает

$$f_{L\theta} = (j\Phi_0/c)(\theta - \theta_j), \quad (8.12)$$

где θ_j – это угол между направлением вектора плотности тока \mathbf{j} и двойников. Заметим, что согласно формуле (8.12), $f_{L\theta}$ не зависит от θ^* (в приближении $\theta^* \ll 1$) и пригодна для всех углов θ (а не только для $|\theta| < |\theta^*|$). Зависимость $j_c(\theta)$ находится из условия $f_{L\theta}[j_c(\theta)] = f_{p\theta}$, что дает [19]

$$j_c(\theta) = \begin{cases} j_c^>(\theta) \equiv f_{\perp}/(\Phi_0/c) \sin(\theta - \theta_j), & |\theta| > |\theta^*| \\ j_c^<(\theta) = f_{\perp}(|\theta|/|\theta^*|) + \\ \quad + f_{\parallel}(1 - |\theta|/|\theta^*|)/(\Phi_0/c) \sin(\theta - \theta_j). & |\theta| < |\theta^*| \end{cases} \quad (8.13)$$

Если для заданного направления тока j ввести как экспериментально измеряемые два значения плотности критического тока j_c^{\parallel} и j_c^{\perp} для $\mathbf{H} \parallel \mathbf{TB}$ и $\mathbf{H} \perp \mathbf{TB}$ соответственно [см. рис. 8.1], то в этих терминах соотношение (8.13) имеет вид

$$j_c(\theta) = \begin{cases} j_c^>(\theta) \equiv j_c^{\perp} \cos \theta_j / \sin(\theta - \theta_j) & |\theta| > |\theta^*| \\ j_c^<(\theta) \psi(|\theta|) & |\theta| < |\theta^*|, \end{cases} \quad (8.14)$$

где

$$\psi(|\theta|) = |\theta|/|\theta^*| - (j_c^{\parallel}/j_c^{\perp})(1 - |\theta|/|\theta_j|) \operatorname{tg} \theta_j. \quad (8.15)$$

Для вывода формулы для нелинейного сопротивления крипа $\rho_{cr}(\theta, j)$, необходимо вычислить угловую зависимость энергии активации крипа $U(\theta)$, для чего мы воспользуемся условием $\delta U[j_c(\theta)] = U$, где U – энергия активации в отсутствие тока, δU – зависящая от тока поправка к U , а $j_c(\theta)$ дается формулой (8.14).

Окончательно имеем [19]

$$\rho_{cr}(\theta, j) = [2\rho_{c\perp} j_{c\perp} / j_c^>(\theta)] \exp[-U(\theta)/T] \operatorname{sh}[Uj/(Tj_c^>(\theta))], \quad (8.16)$$

где $U(\theta) = U$ для $|\theta| > |\theta^*|$ и $U(\theta) = U\psi(\theta)$ для $|\theta| < |\theta^*|$. Здесь U есть энергия

активации для движения вихрей в отсутствие двойников (и $j = 0$) и $\rho_{c\perp} = \rho_{cr}(\theta = \pi/2, j_c)$. В отсутствие двойников из формулы (8.16) следует результат ранее полученный в лекции 4 [см. формулу (4.9)].

8.4 Крип вихрей при пиннинге вихрей на двойниках

Перейдем к анализу полученных на кафедре экспериментальных данных [18]. На рис. 8.4(а) изображены вольт-угловые характеристики кристалла $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$, измеренные при температуре 90.2 К для ряда токов J в поле $H = 1.5$ Т для малых углов $|\theta| < 10^\circ$. С помощью рис. 8.4(а) была получена угловая зависимость критического тока J_c , определяемая как ток, создающий на образце напряжение $0.5 \mu\text{V}$ (что соответствует напряженности электрического поля $10 \mu\text{V}/\text{cm}$). Полученные экспериментальные результаты [рис. 8.4(б)] оказались в хорошем согласии с теоретическими предсказаниями [формула (8.14)] для $\theta_j = -45^\circ$, которые дают почти линейную зависимость $j_c(\theta)$ по обе стороны от линии $\theta = 0$. Экстраполяция $J_c(\theta)$ к $V = 0$ дает $2\theta^* = 14^\circ$, а экстраполяция к $\theta = 0$ дает $J_c^{\parallel} = 36$ mA на уровне $U = 0.5 \mu\text{V}$. Измеренные значения J_c^{\perp} равны 1.1 mA. Таким образом, в наших кристаллах анизотропия критического тока оказалась $\alpha = J_c^{\parallel}/J_c^{\perp} \approx 30$. Это означает, что энергия активации “кинетического” пиннинга вихрей, движущихся вдоль оси c по двойникам, примерно в 30 раз выше, чем для вихрей, направленных перпендикулярно двойникам.

Сравнение полученных нами величин $\alpha \approx 30$ с оценками $\alpha \approx 6$ по резистивным измерениям и $\alpha \approx 10$ по минимальной величине $R(\theta)$ для кристаллов аргоннской группы показывает, что интенсивность “кинетического” пиннинга на двойниках в наших кристаллах значительно выше. Это коррелирует со значительно большей величиной θ^* (7° и 1.5° соответственно), характеризующей интенсивность термодинамического пиннинга.

Таким образом, сравнение наших результатов с аналогичными результатами Kwok *et al.* приводит нас к выводу, что феноменологические характеристики интенсивности термодинамического и кинетического пиннинга на двойниковых границах (θ^* и α , соответственно) взаимосвязаны, так как имеют, по-видимому, похожее микроскопическое происхождение.

В заключение отметим, что вычисленные с помощью формулы (8.16) теоретические кривые $V(\theta, j)$ для $V_c = \rho_{cr}j_c$, $\alpha = 30$ и $\beta \equiv U/T \simeq 0.2$ находятся

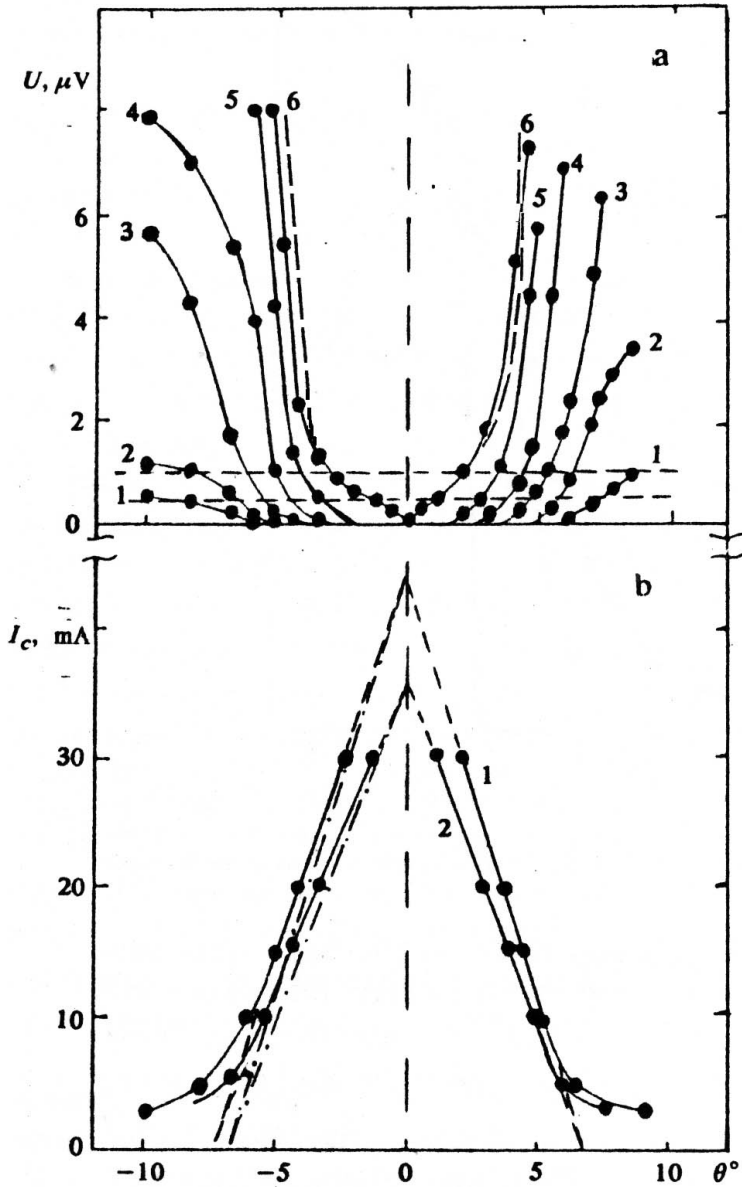


Рис. 8.4. (а) Вольт-угловые характеристики для $\mathbf{H} \perp \mathbf{c}$ и $\mathbf{I} \perp \mathbf{c}$, измеренные при $I = 3, 5, 10, 15, 20, 30$ мА (кривые 1-6, соответственно). (б) Зависимости $J_c(\theta)$, определенные при различных уровнях падения напряжения на образце ($1 \mu\text{V}$ – кривая 1, и $0.5 \mu\text{V}$ – кривая 2).

в удовлетворительном согласии с нашими экспериментальными результатами, полученными при токах $J = 10, 20$ и 30 мА (см. пунктирную кривую на рис. 8.4(a) для тока $J = 30$ мА).

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Выведите формулу $\rho_f(\theta) = \rho_f \sin^2 \theta$.
2. От каких параметров зависит величина критического угла?
3. Какой вид имеет вихревая линия для $\theta < \theta^*$ и $\theta > \theta^*$?
4. Проанализируйте выражения для энергии деформированной вихревой нити.
5. Поясните разницу между термодинамическим и кинетическим аспектами задачи о пиннинге вихрей на двойниках.
6. Проведите сравнительный анализ результатов Аргоннской группы и нашей группы по пиннингу вихрей на двойниках.

Лекция 9

Реакция сверхпроводника на переменное электромагнитное поле

9.1 Комплексная проводимость сверхпроводника

В предыдущих лекциях мы обсуждали реакцию сверхпроводников на протекание постоянного тока и их поведение в постоянном магнитном поле. В этой лекции мы перейдем к изучению реакции сверхпроводника на переменное электромагнитное (ЭМ) поле и начнем с изучения комплексной проводимости сверхпроводника, на плоскую поверхность которого падает из вакуума нормально к его поверхности плоская ЭМ волна.

Относительно нормальной проводимости металла мы будем предполагать, что длина свободного пробега электронов l невелика, так что связь электрического поля и тока *локальна*, что соответствует приближению *нормального скин-эффекта*, когда l меньше характерной глубины проникновения ЭМ поля.

Для вычисления высокочастотной проводимости сверхпроводника мы воспользуемся двухжидкостной моделью сверхпроводящего состояния, т. е. будем считать, что при $T < T_c$ существуют нормальные электроны с плотностью $n_n(T)$ и сверхпроводящие электроны с плотностью $n_s(T)$, причем $n_n(T) + n_s(T) = n$, где n – плотность электронов проводимости металла.

Получим сначала уравнение движения сверхпроводящих электронов в электрическом поле напряженностью \mathbf{E} . Если $M_s = n_s m$ есть масса сверхпроводящих электронов единицы объема, а $Q_s = n_s e$ есть заряд этих электронов, то второй

закон Ньютона для них может быть записан в виде $M_s d(\mathbf{V}_s/dt) = \mathbf{F} = Q_s \mathbf{E}$, где \mathbf{V}_s – скорость сверхтекучих электронов, а \mathbf{F} – действующая на них сила. С учетом того, что $\mathbf{V}_s = \mathbf{j}_s/Q_s$, где \mathbf{j}_s – плотность тока сверхпроводящих электронов, имеем (первое уравнение Лондонов):

$$\mathbf{E} = \Lambda \frac{d\mathbf{j}_s}{dt}, \quad (9.1)$$

где $\Lambda = m/(n_s e^2)$. Для нормальных электронов второй закон Ньютона имеет вид $M_n(d\mathbf{V}_n/dt) + M_s(\mathbf{V}_n/\tau) = Q_n \mathbf{E}$, откуда легко получить

$$\mathbf{E} = \frac{n_s}{n_s} \Lambda \left(\frac{d\mathbf{j}_n}{dt} + \frac{\mathbf{j}_n}{\tau} \right), \quad (9.2)$$

где $\tau \sim 1/v_F$ есть *время релаксации* нормальных электронов, а v_F – фермиевская скорость.

Пусть теперь $\mathbf{j}_{n,s}(t) = \mathbf{j}_{n,s} \exp(-i\omega t)$. Тогда (9.1) и (9.2) могут быть записаны как

$$\mathbf{j}_s = \frac{i}{\Lambda\omega} \mathbf{E}, \quad (9.3)$$

$$\mathbf{j}_n = \frac{n_n \tau}{n_s \Lambda} \frac{1 + i\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \mathbf{E}. \quad (9.4)$$

С учетом того, что полная плотность тока $\mathbf{j} = \mathbf{j}_n + \mathbf{j}_s$, мы получаем окончательно, что

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad \sigma = \sigma_1 + i\sigma_2, \quad (9.5)$$

$$\sigma_1 = \frac{n_n \tau}{n_s \Lambda} \frac{1}{1 + (\omega\tau)^2}, \quad (9.6)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{\Lambda\omega} \left[1 + \frac{n_n}{n_s} \frac{(\omega\tau)^2}{1 + (\omega\tau)^2} \right]. \quad (9.7)$$

Как следует из уравнений (9.3) и (9.4), \mathbf{j}_s имеет лишь реактивную составляющую (т. е. является чисто мнимой величиной), тогда как \mathbf{j}_n – как активную, так и реактивную. Таким образом, *поглощение мощности* высокочастотного поля будет связано с величиной σ_1 . Уравнения (9.5)–(9.7) дают *комплексную проводимость*

сверхпроводника в гармоническом поле высокой частоты. Рассмотрим несколько простых предельных случаев, следующих из этих уравнений.

Если $T > T_c$, т. е. образец находится в нормальном состоянии, то с учетом того, что $n_n = n$, а $n_s \Lambda = m/e^2$ из (9.6) следует обычное выражение для $\sigma(\omega)$ в модели Друде-Лоренца $\sigma(\omega) = \sigma_0/(1 + \omega^2 \tau^2)$, которое в пределе $\omega \rightarrow 0$ переходит в известное выражение для *статической проводимости* $\sigma_0 = ne^2 \tau/m$. Если же $T = 0$, то $n_n(T) = 0$, $n_s(T) = n$ и $\sigma_1(\omega) = 0$, т. е. активная составляющая проводимости $\sigma(\omega)$ исчезает, что физически связано с отсутствием нормальных электронов. Если же T конечна и меньше T_c , то $\sigma_1(\omega, T) = \sigma_n(T)/(1 + \omega^2 \tau^2)$, где $\sigma_n(T) \equiv n_n(T)e^2 \tau/m$ есть зависящая от T (в меру плотности нормальных электронов) статическая проводимость.

Если же $T \rightarrow T_c$, то $n_s(T) \rightarrow 0$, а $n_n(T \rightarrow n)$ и $\sigma_1 \rightarrow \sigma(\omega)$, тогда как $\sigma_2 \rightarrow (\omega \tau) \sigma(\omega)$. Любопытно также отметить те упрощения, которые возникают в формулах (9.6) и (9.7) в случае, когда $(\omega \tau)^2 \ll 1$. Для большинства “холодных” сверхпроводников, использующихся на частотах до ~ 10 ГГц и имеющих при T вблизи T_c в нормальном состоянии времена упругой релаксации электронов $\tau \simeq 10^{-13}$ сек, будет $\omega \tau \ll 1$ и можно считать, что $\sigma_1(\omega) \approx \sigma_0$, а $\sigma_2(\omega) \approx (\omega \tau) \sigma_0 \ll \sigma_0$. Применение двухжидкостного описания к высокотемпературным сверхпроводникам (ВТСП) приводит к выводу, что в аналогичных условиях (T вблизи T_c в нормальном состоянии) время релаксации зависит от температуры (что свидетельствует уже о наличии и неупругих механизмов релаксации нормальной компоненты). Более того, для $T < T_c$ температурная зависимость $\tau(T)$ определяется фактически тем, что “нормальные” электроны являются квазичастичными возбуждениями конденсата, а концентрация последних, согласно микроскопической теории [3], может существенно изменяться с понижением температуры.

В связи с этим любопытно отметить, что из формул (9.6) и (9.7) можно получить зависимость $\tau(T)$ в терминах экспериментально измеримых зависимостей $\sigma_1(T)$ и $\sigma_2(T)$ при произвольных значениях параметра $\omega \tau(T)$, если переписать формулу (9.7) в виде

$$\sigma_2(T) = \frac{1}{\omega \Lambda(T)} \left\{ \left[1 + \frac{n_n(T)}{n_s(T)} \right] - \frac{n_n(T)}{n_s(T)} \frac{1}{1 + (\omega \tau)^2} \right\},$$

после чего становится очевидным, что

$$\sigma_2(T) = \frac{1}{\omega \Lambda(T)} \left[\frac{n}{n_s(T)} - \frac{\Lambda(T) \sigma_1(T)}{\tau(T)} \right] = \frac{ne^2}{m\omega} - \frac{\sigma_1(T)}{\omega \tau(T)}, \quad (9.8)$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{\tau(T)} = \frac{(ne^2/m)}{\sigma_1(T)} - \omega \frac{\sigma_2(T)}{\sigma_1(T)}. \quad (9.9)$$

Мы воспользуемся этой формулой ниже, после вычисления импеданса сверхпроводника в терминах двухжидкостной модели.

9.2 Нормальный скин-эффект в сверхпроводнике

Рассмотрим ЭМ волну, падающую нормально на поверхность металла (плоскость $x = 0$) в положительном направлении. Пусть $\mathbf{E} \parallel \mathbf{y}$, а $\mathbf{H} \parallel \mathbf{z}$, где \mathbf{y} и \mathbf{z} – соответствующие орты. Благодаря *скин-эффекту*, поле волны внутри металла (для $x > 0$) становится неоднородным вдоль оси x . Если предполагать, что длина свободного пробега электронов в металле l значительно меньше характерной глубины затухания поля δ (*глубины скин-слоя*), то в этом случае можно считать связь между электрическим полем \mathbf{E} и током \mathbf{j} в металле *локальной*, т. е. подчиняющейся *материальному уравнению* $\mathbf{j} = \sigma(\omega)\mathbf{E}$.

Мы рассмотрим ниже лишь *квазистационарный случай*, когда можно пренебречь токами смещения. Тогда интересующие нас уравнения Максвелла имеют вид

$$\text{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}, \quad (9.10)$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (9.11)$$

Взяв rot от обеих частей уравнения (9.10), подставим в него (9.11). Используя равенство $\text{rot} \text{rot} \mathbf{H} = -\Delta \mathbf{H}$ (с учетом уравнения $\text{div} \mathbf{H} = 0$), получим

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (9.12)$$

Если магнитное поле изменяется как $\mathbf{H}(x, t) = \mathbf{H} \exp[i(kx - \omega t)]$, то из (9.12) следует, что

$$k^2 = i \cdot 4\pi\sigma\omega/c^2, \quad (9.13)$$

откуда

$$k = (1 + i)/\delta, \quad (9.14)$$

где

$$\delta = (c^2/2\pi\sigma\omega)^{1/2} \quad (9.15)$$

есть глубина скин-слоя. Здесь при переходе от (9.13) к (9.14) мы учли, что $\sqrt{i} = (1 + i)/\sqrt{2}$. Из условия (9.14) следует, что для $x > 0$ справедливо $H \sim \exp(ikx) \sim \exp(-x/\delta)$, т. е. поле $\mathbf{H}(x, t)$ затухает на глубине скин-слоя в e раз. Подставим теперь величину $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$ в уравнение (9.15), предположив пока для простоты, что $\omega\tau \ll 1$ и температура не очень близка к T_c , так что выполняется неравенство $(n_n/n_s)(\omega\tau)^2 \ll 1$. Тогда из формул (9.6) и (9.7) следует, что

$$\sigma(T, \omega) = \frac{n_n(T)}{n_s(T)} \frac{\tau}{\Lambda(T)} + i \frac{1}{\omega\Lambda(T)}. \quad (9.16)$$

Подставляя это выражение в формулу для $\delta(\omega, T)$, получим

$$\delta = \left[\frac{c^2}{2\pi\omega(\sigma_1 + i/\omega\Lambda)} \right]^{1/2} = \left[\frac{\Lambda c^2}{2\pi \left(\frac{n_n}{n_s} \omega\tau + i \right)} \right]^{1/2} = \frac{\sqrt{2}\lambda}{\left(\frac{n_n}{n_s} \omega\tau + i \right)^{1/2}}. \quad (9.17)$$

Для низких частот, когда $(n_n/n_s)\omega\tau \ll 1$, имеем $\delta \simeq \sqrt{2}\lambda/\sqrt{i} = \lambda(1 - i)$. Подставляя это выражение в формулу (9.14), мы получим $k = i/\lambda$, т. е. для $\omega \rightarrow 0$ будет $\mathbf{H} \sim \exp(ikx) = \exp(-x/\lambda)$. Это означает, что низкочастотное магнитное поле проникает в сверхпроводник как и стационарное магнитное поле (в эффекте Мейсснера) на глубину проникновения λ .

9.3 Поверхностный импеданс металла

Рассмотрим теперь задачу об отражении (и частичном поглощении) ЭМ волны, падающей нормально из вакуума на *металлическое* полупространство (рис. 9.1). Запишем для этого уравнения Максвелла (9.10) и (9.11) в проекциях применительно к геометрии рисунка 9.1. В силу того, что поля и токи изменяются лишь вдоль оси x (для $x > 0$) и $\mathbf{H} = (0, 0, H_z(x))$, $\mathbf{E} = (0, E_y(x), 0)$, $\mathbf{j} = (0, j_y(x), 0)$ и того,

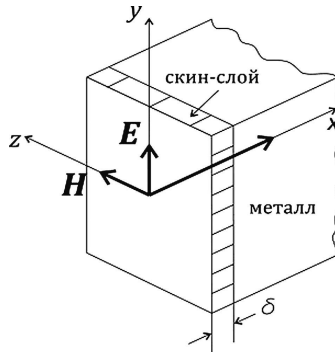


Рис. 9.1. Геометрия задачи о падении ЭМ волны на поверхность металла

что

$$\text{rot } \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & H_z(x) \end{vmatrix} = -\mathbf{y} \frac{\partial H_z(x)}{\partial x}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{z} \frac{\partial E_y(x)}{\partial x} \quad (9.18)$$

для полей и токов изменяющихся $\sim \exp[i(kx - \omega t)]$ уравнения Максвелла (9.10) и (9.11) приобретают вид

$$\frac{\partial E_y(x)}{\partial x} = \frac{i\omega}{c} H_z(x), \quad (9.19)$$

$$\frac{\partial H_z(x)}{\partial x} = -\frac{4\pi}{c} j_y(x), \quad (9.20)$$

что дает

$$\frac{\partial^2 E_y(x)}{\partial x^2} = \frac{i\omega}{c} \frac{\partial H_z(x)}{\partial x} = -i \frac{4\pi\omega}{c^2} j_y(x). \quad (9.21)$$

Для анализа уравнений (9.19)-(9.21) введем понятие *поверхностного импеданса* металла как отношения

$$Z(\omega) = \frac{4\pi}{c} \left(\frac{E_y(x)}{H_z(x)} \right) \Big|_{x=+0}. \quad (9.22)$$

Другое название $Z(\omega)$ – *комплексное поверхностное сопротивление* – связано с другой формой его записи. Для этого вычислим из (9.20) ток I_y , проходящей через площадку бесконечно длинной полоски шириной в 1 см и простирающейся в глубину металла до бесконечности вдоль оси x перпендикулярно оси y (размер-

ность I_y равна размерности плотности тока $j_y(x)$, умноженной на размерность длины, т. е. см). Итак,

$$I_y = \int_0^{\infty} j_y(x) dx = -\frac{c}{4\pi} H_z(x) \Big|_0^{\infty} = \frac{c}{4\pi} H_z(x = +0). \quad (9.23)$$

Заметим, что I_y , в силу быстрого затухания магнитного поля вглубь металла [$H_z(x = \infty) = 0$], есть *поверхностный ток* и тогда из (9.22) следует

$$Z(\omega) = \frac{E_y(x = +0)}{I_y}. \quad (9.24)$$

т. е. $Z(\omega)$ можно рассматривать как *поверхностное сопротивление* (что и оправдывает размерность импеданса в СГС системе). Наконец, последняя форма записи $Z(\omega)$ следует из уравнения (9.19)

$$Z(\omega) = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \left(\frac{E_y}{\partial E_y / \partial x} \right) \Big|_{x=+0}. \quad (9.25)$$

Воспользуемся теперь определением (9.25) в случае нормального скин-эффекта (см. пункт 9.2). Тогда $\partial E_y / \partial x = ikE_y$ и, используя формулу (9.14), имеем

$$Z(\omega) = \frac{4\pi\omega}{c^2} i \frac{1}{ik} = \frac{4\pi\omega}{kc^2} = \frac{4\pi\omega\delta}{c^2(1+i)} = \frac{2\pi\omega\delta}{c^2}(1-i) \equiv R(\omega) + iX(\omega), \quad (9.26)$$

где $R(\omega)$ есть активная часть импеданса, а $X(\omega)$ – реактивная часть. Из формулы (9.26) следует, что в случае нормального металла, когда $\sigma_0 = ne^2\tau/m$ вещественно [т. е. в пределе низких частот, когда $(\omega\tau)^2 \ll 1$] с учетом (9.15) получим, что абсолютные величины R и X равны и пропорциональны $\sqrt{\omega}$, т. е.

$$R(\omega) \simeq -X(\omega) = \frac{2\pi\omega}{c^2} \frac{1}{(2\pi\omega\sigma_0/c^2)^{1/2}} = \sqrt{\frac{2\pi\omega}{\sigma_0 c^2}}. \quad (9.27)$$

Покажем, что величина $R(\omega)$ определяет величину потерь в единицу времени (т. е. поглощаемую мощность), связанную с диссипацией энергии ЭМ волны в поверхностном слое металла толщиной δ . Для этого вычислим среднюю по времени энергию поля Q , втекающую в 1 см² за 1 сек в проводник в направлении x как вещественную часть среднего по времени комплексного вектора энергии (вектора Пойнтинга) в соответствии с правилами действия с квадратичными физическими величинами при комплексном описании исходных величин

(см. [14], с. 285)

$$Q = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{c}{4\pi} (\overline{\mathbf{E} \times \mathbf{H}})_x \Big|_{x=+0}, \quad (9.28)$$

где черта означает усреднение по периоду $T = 2\pi/\omega$. Воспользовавшись формулами (9.23) и (9.24), получим

$$Q = \frac{1}{2} \operatorname{Re} Z(\omega) j^2 = \frac{1}{2} R(\omega) I^2 = \rho_0 j^2 \quad (9.29)$$

т. к. $R = \rho_0/\delta$ есть сопротивление (на единицу длины) полоски проводника сечением $1 \text{ см} \times \delta \text{ см}$. Действительно, в силу того, что $R = (2\pi\omega/c^2\sigma_0)$, а $\delta = \sqrt{c^2/2\pi\omega\sigma_0}$ [см. (9.15) и (9.27)], сразу получаем $R\delta = 1/\sigma_0 \equiv \rho_0$.

Если активная составляющая импеданса, согласно формуле (9.29), определяет величину потерь в скин-слое, то реактивная составляющая $X(\omega)$ определяет, согласно (9.24), сдвиг фаз между полем E_y и поверхностным током I_y . Если R и X измерять на сверхвысоких частотах (СВЧ) с помощью резонатора, стенки которого сделаны из исследуемого металла, то R находится по добротности резонатора, а X – по сдвигу его резонансной частоты (по сравнению с расчетной ω_0 для металла с $\sigma_0 \rightarrow \infty$ (или $\delta \rightarrow 0$)).

Сделаем оценки величины импеданса в двух типичных случаях – для пустого пространства (“воздуха”) и для меди при комнатной температуре и частоте $\omega = 10^{11}$ Гц, когда ее проводимость $\sigma_0 \simeq 5 \times 10^{17}$ 1/сек. Для ЭМ волны, распространяющейся со скоростью света в среде с $\varepsilon = \mu = 1$ векторы напряженностей электрического и магнитного поля взаимно перпендикулярны, равны и совпадают по фазе. Соответственно, $Z_0 = 4\pi/c = 4\pi \cdot 30 \Omega \approx 377 \Omega$ т. к. $1 \Omega = 1.1 \times 10^{-12}$ сек/см, и называется *характеристическим (или волновым) сопротивлением* свободного от вещества пространства. Для меди $Z_{\text{Cu}} \simeq 3 \times 10^{-14}$ сек/см $\simeq 3 \times 10^{-2} \Omega$, т. е. $Z_{\text{Cu}} \ll Z_0$.

Так как импеданс металла значительно меньше импеданса свободного пространства, то падающая из вакуума на металл волна *отражается* практически *зеркально*, формируя с падающей волной *стоячую волну* (см. рис. 9.2) с амплитудой осцилляций магнитного поля на поверхности металла вдвое большей падающей амплитуды, т. е. $I_y^{\text{surface}} = \frac{c}{2\pi} H_z^{\text{incident}}$ в слое толщиной δ . Это также означает, что поле E_y на поверхности металла в Z_M/Z_0 раз меньше H_z , т. к. $E_y = \frac{Z}{Z_0} B_z$ [см. формулу (9.22) и определение Z_0]. Для идеального металла, у которого $\sigma_0 \rightarrow \infty$

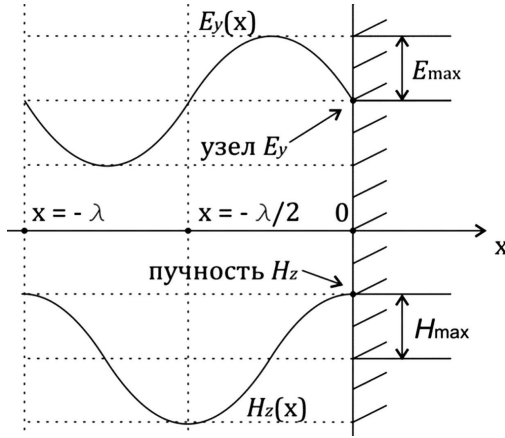


Рис. 9.2. Отражение ЭМ волны от поверхности идеального металла (λ – длина волны).

и $Z_M \rightarrow 0$, $E_y \rightarrow 0$ на его поверхности. Из рисунка 9.2 следует, что в отраженной стоячей волне (в отличие от бегущей в положительном направлении оси x волны) фазы E_y и H_z отличаются на $\pi/2$, чему соответствует наличие множителя $(1 - i)$ в формуле (9.26) для импеданса в случае нормального скин-эффекта. В некоторые мгновения, дважды в течение периода, вся энергия стоячей волны сосредотачивается в магнитном поле, а через четверть периода – в электрическом поле.

9.4 Поверхностный импеданс сверхпроводника

Рассмотрим сначала скин-эффект при нормальном падении электромагнитной волны на *сверхпроводящее* полупространство, используя для этого формулы (9.14) и (9.15) для $k = (1 + i)/\delta$ и $\delta \equiv [c^2/2\pi\omega\sigma(T, \omega)]^{1/2}$. Для простоты сначала рассмотрим случай, когда температура T не очень близка к T_c и $\omega\tau \ll 1$. Как следует в этом случае из формул (9.5)–(9.7)

$$\sigma_1 \simeq \frac{n_n(T)}{n_s(T)} \frac{\tau}{\Lambda(T)}, \quad \sigma_2 \simeq \frac{1}{\Lambda\omega}, \quad \sigma(T, \omega) \simeq \frac{1}{\Lambda\omega} \left[\frac{n_n(T)}{n_s(T)} \omega\tau + i \right] \quad (9.30)$$

так что

$$\sigma(T, \omega) \simeq \left\{ \frac{c^2 \omega \Lambda(T)}{2\pi\omega \left[\frac{n_n(T)}{n_s(T)} \omega \tau + i \right]} \right\}^{1/2} \simeq \left[\frac{c^2 \Lambda(T)}{2\pi i} \right]^{1/2} = \lambda(T)(1 - i). \quad (9.31)$$

Подставляя это выражение в формулу (9.4), получаем $k = i/\lambda(T)$, после чего $H_z(x) \sim \exp(ikx) = \exp[-x/\lambda(T)]$, т. е. низкочастотное поле проникает в сверхпроводник на глубину проникновения $\lambda(T)$, т. е. так же, как статическое поле.

Обратимся теперь к вычислению *поверхностного импеданса* сверхпроводника. Из (9.20) следует, что $ikH_z(x) = -(4\pi/c)\sigma E_y(x)$ и тогда, с учетом (9.22) имеем $Z(\omega) = -ik/\sigma$, что с учетом (9.13) дает

$$Z(\omega, T) = (1 - i)/\delta \cdot \sigma. \quad (9.32)$$

Рассмотрим сначала простейший случай достаточно низких частот, так что $\omega\tau \ll 1$, и температур не очень близких к T_c . Последнее также предполагает выполнение неравенства $[n_n(T)/n_s(T)](\omega\tau)^2 \ll 1$, которое может перестать выполняться из-за того, что при $T \rightarrow T_c$ всегда $n_s(T) \rightarrow 0$. При выполнении этих двух неравенств σ_1 и σ_2 описываются формулами (9.30). Подставляя в формулу (9.32) выражения (9.30) и (9.31) при конечном $\omega\tau \ll 1$ мы получаем

$$Z(\omega, T) = \frac{\Lambda\omega}{\lambda\sqrt{2}} \frac{1 - i}{[(n_n/n_s)\omega\tau + i]} \simeq \frac{4\pi\omega}{c^2} \lambda(T) \left[i + \frac{n_n(T)\omega\tau}{2n_s(T)} \right] = R + iX, \quad (9.33)$$

где

$$R(\omega, T) = \frac{2\pi\omega^2\lambda(T)}{c^2} \frac{n_n(T)}{n_s(T)} \cdot \tau, \quad X(\omega, T) = 4\pi\omega\lambda(T)/c^2. \quad (9.34)$$

Активная часть импеданса, как и раньше, характеризует потери на нагрев скин-слоя, а реактивная часть имеет индуктивный характер.

Чтобы выяснить температурную зависимость $R(\omega, T)$ и $X(\omega, T)$, воспользуемся эмпирической зависимостью $\lambda(T) = \lambda(0)(1 - t^4)^{-1/2}$, где $t = T/T_c$. Поскольку $\lambda(T) \sim [n_s(T)]^{-1/2}$, то $n_s(T) = n(1 - t^4)$, откуда $n_n(T) = nt^4$. Тогда

$$R(T) \sim t^4/(1 - t^4)^{3/2}, \quad X(T) \sim (1 - t^4)^{-1/2}. \quad (9.35)$$

Формулы (9.35) достаточно хорошо передают температурную зависимость ак-

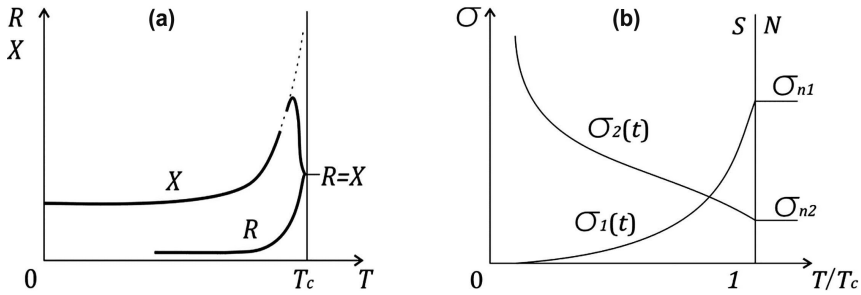


Рис. 9.3. Температурные зависимости (а) активной и реактивной компонент импеданса и (б) проводимости сверхпроводника согласно двухжидкостной модели.

тивной и реактивной компонент импеданса за исключением области температур вблизи T_c . В этой области упрощенные формулы (9.34) уже неверны, так как неравенство $[n_n(T)/n_s(T)(\omega\tau)^2] \ll 1$, использованные при их выводе, ввиду $n_s(T) \rightarrow 0$ при $T \rightarrow T_c$ уже нарушается. Поэтому при $T \rightarrow T_c$ в формулах (9.14) и (9.15) для σ_1 и σ_2 можно пренебречь $(\omega\tau)^2$ в их знаменателях, а также опустить единицу в квадратной скобке для σ_2 . Тогда

$$\sigma = (n_n/n_s)\tau/\Lambda + i(n_n/n_s)(\omega\tau)^2/\Lambda\omega. \tag{9.36}$$

Пренебрегая в (9.36) мнимой частью по параметру $\omega\tau \ll 1$ и подставляя полученное выражение в (9.32) с учетом того, что $n_n \rightarrow n$, $n_s(T)\Lambda(T) \rightarrow m/e^2$, мы получим, что $\sigma(T \rightarrow T_c, \omega) \rightarrow \sigma_n(1 + i\omega\tau) \simeq \sigma_n$, где σ_n – проводимость в нормальном состоянии; после чего из (9.32) получим

$$Z(\omega) = (1 - i)/\sigma_n\delta_n, \tag{9.37}$$

где σ_n и δ_n – проводимость и глубина скин-слоя нормального металла. Из (9.37) следует, что $R(\omega, T)$ и $X(\omega, T)$ при $T \rightarrow T_c$ принимают одинаковое значение и теряют свою зависимость от температуры [сравни с формулой (9.27)].

Температурная зависимость активной и реактивной компоненты импеданса сверхпроводника, в двухжидкостной модели, представлена на рис. 9.3(а). На рис. 9.3(б) представлена примерная температурная зависимость σ_1 и σ_2 от $t = T/T_c$ [см. формулы (9.6) и (9.7)]. Следует отметить, что для $t \ll 1$ двухжидкостная модель работает плохо, ибо из теории БКШ следует, что $n_n \sim \exp(-\Delta/T)$, т. е. число нормальных возбуждений зависит экспоненциально от величины щели $\Delta(0)$.

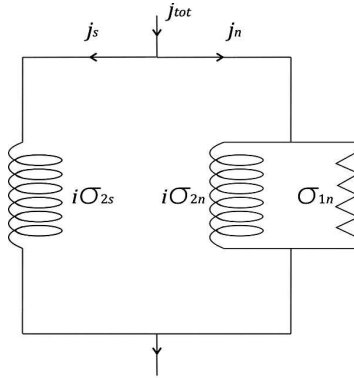


Рис. 9.4. Эквивалентная схема, иллюстрирующая основные представления о плотностях тока и компонентах проводимости в двухжидкостной модели сверхпроводника.

На рис. 9.4 представлена эквивалентная схема, иллюстрирующая основные представления о плотностях тока $j_{tot} = j_s + j_n$ и компонентах проводимости $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$ в двухжидкостной модели сверхпроводника.

Здесь $\sigma_1 = \sigma_{1n}$ и $\sigma_2 = \sigma_{2s} + \sigma_{2n}$, где $\sigma_{2s} = n_s e^2 / m\omega$ и $\sigma_{2n} = n_n e^2 (\omega\tau)^2 / m\omega(1 + \omega^2\tau^2)$. Используя теперь формулу (9.32) и связь $\sigma(T, \omega) = \sigma_1(T, \omega) + i\sigma_2(T, \omega)$, а также то, что $Z(T, \omega) = R(T, \omega) + iX(T, \omega)$, можно выразить σ_1 и σ_2 через экспериментально наблюдаемые величины R и X . Для этого возведем в квадрат формулу (9.32) и получим $Z^2 = (R^2 - X^2) - 2iRX = i \cdot 4\pi\omega / \sigma c^2$. Отсюда $\sigma = i \cdot 4\pi\omega / Z^2 c^2 = i4\pi\omega(Z^2)^* / c^2 |Z|^2$. Но $(Z^2)^* = (R^2 - X^2) - 2iRX$, а $Z^2 \cdot (Z^2)^* = (R^2 - X^2)^2 + 4R^2 X^2 = (R^2 + X^2)^2 = |Z|^4$. Окончательно,

$$\sigma_1(T, \omega) = \frac{4\pi\omega}{c^2 |Z|^4} 2RX, \quad \sigma_2(T, \omega) = \frac{4\pi\omega}{c^2 |Z|^4} (X^2 - R^2). \quad (9.38)$$

Отметим, что формулы (9.38) справедливы при любых значениях параметра $\omega\tau$ и, используя формулу (9.7), позволяют записать время релаксации нормальных возбуждений сверхпроводника в терминах двухжидкостной модели через наблюдаемые на эксперименте зависимости $R(T, \omega)$ и $X(T, \omega)$ в виде

$$\frac{1}{\tau(T)} = \frac{2RX\omega}{(X^2 - R^2) - \Phi^2}, \quad (9.39)$$

где $\Phi^2 \equiv [c^2|Z|^2/4\pi\omega\lambda(T)]^2$, а $\lambda^2(T) = mc^2/4\pi n_s(T)e^2$. В том случае, если известно лишь $\lambda^2(0) = mc^2/4\pi ne^2$, то (9.39) принимает вид

$$\frac{1}{\tau(T)} = \{[c^2|Z|^2/4\pi\lambda(0)]^2/\omega - \omega(X^2 - R^2)\}/2RX. \quad (9.40)$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что характеризуют активная и реактивная составляющие импеданса? Постройте схематически их температурную зависимость для сверхпроводника.
2. Получите выражение для толщины скин-слоя в металле (нормальный скин-эффект). Что происходит с δ , когда металл становится сверхпроводящим?
3. Объясните понятие поверхностного импеданса. Как можно найти его компоненты в СВЧ эксперименте с резонатором из исследуемого материала?
4. Постройте и объясните эквивалентную схему для компонент тока и проводимости в сверхпроводнике согласно двухжидкостной модели.

Лекция 10

Динамика вихрей на переменном токе

Одним из наиболее распространенных методов изучения динамики вихрей в сверхпроводниках второго рода является измерение комплексного электродинамического отклика образца в радиочастотном и микроволновом диапазонах. Такой отклик на частотах, значительно меньших частот разрушения энергетической щели, содержит важную информацию о диссипативных процессах в сверхпроводнике, которая не может быть получена при резистивных измерениях на постоянном токе для образцов с достаточно сильным пиннингом. Действительно, в последнем случае, когда критические плотности тока j_c достаточно велики, реализация диссипативного режима, в котором может быть измерено сопротивление течения потока ρ_f , требует выполнения условия $j_0 \gg j_c$ (j_0 – плотность постоянного тока), что часто сопровождается существенными перегревами образца, изменяющими величину искомого ρ_f . В то же время измерения мощности, поглощаемой вихрями на переменном токе с амплитудой $j_1 \ll j_c$ (j_1 – плотность амплитуды переменного тока), позволяют измерить ρ_f при диссипируемых мощностях $\mathcal{P}_1 \sim \rho_f j_1^2$, которые могут быть на много порядков меньше, чем $\mathcal{P}_0 \sim \rho_f j_0^2$, т. е. фактически в отсутствие перегревов образца.

В случае, когда сила Лоренца, действующая на вихри, является переменной, резистивный отклик на частоте внешнего воздействия приобретает благодаря наличию пиннинга мнимую (т. е. не совпадающую по фазе) компоненту. По этой причине измерения зависимости комплексного резистивного отклика от частоты переменного тока через образец содержат существенную информацию о си-

лах пиннинга вихрей в отсутствие неизбежных при измерениях на постоянных “закритических” токах перегревов исследуемых образцов.

10.1 Поглощение мощности на сверхвысоких частотах

Наиболее ранняя теоретическая модель Джиттлемана и Розенблюма (Gittleman and Rosenblum (GR) [20], 1966 г.) рассматривала малые колебания вихря в гармоническом потенциале пиннинга в условиях вязкого трения. GR экспериментально изучили поглощение мощности $\mathcal{P}(\omega)$ на вихрях в пленках PbIn и NbTa в широком диапазоне частот ω и успешно проанализировали свои результаты на основе простейшего уравнения движения вихря

$$\eta \dot{x} + k_p x = f_L, \quad (10.1)$$

где x есть смещение вихря, k_p – константа, характеризующая возвращающую силу f_p в параболической потенциальной яме пиннинга с $U_p(x) = (1/2)k_p x^2$ и $f_p = -dU_p/dx = -k_p x$, η – линейная вязкость вихря. $f_L = (\Phi_0/c)j_1(t)$ есть действующая на вихрь сила Лоренца, Φ_0 – квант магнитного потока, c – скорость света и $j_1(t) = j_1 \exp(i\omega t)$ есть плотность малого переменного транспортного тока с амплитудой j_1 . Если искать решение уравнения (10.1) в виде $x(t) = x \exp(i\omega t)$, где x – комплексная амплитуда смещения вихря, то $\dot{x}(t) = i\omega x(t)$ и тогда

$$x = \frac{(\Phi_0/\eta c)j_1}{i\omega + \omega_p}, \quad (10.2)$$

где $\omega_p \equiv k_p/\eta$ есть так называемая *частота депиннинга вихрей*, физический смысл которой выяснится при анализе зависимости поглощенной мощности от частоты $\mathcal{P}(\omega)$. Для вычисления последней мы сначала воспользуемся формулой $E = B\dot{x}/c$, где B есть величина внешнего магнитного поля, c – скорость света, а E – комплексная амплитуда электрического поля, что дает

$$E(\omega) = \frac{\rho_f j_1}{1 - i\omega_p/\omega} \equiv Z(\omega)j_1. \quad (10.3)$$

Здесь $\rho_f = B\Phi_0/\eta c^2$ есть удельное сопротивление течению потока, а $Z(\omega) \equiv \rho_f/(1 - i\omega_p/\omega)$ – импеданс образца. Для вычисления средней по периоду поглощенной мощности $\mathcal{P}(\omega)$ воспользуемся “стандартным” соотношением $P =$

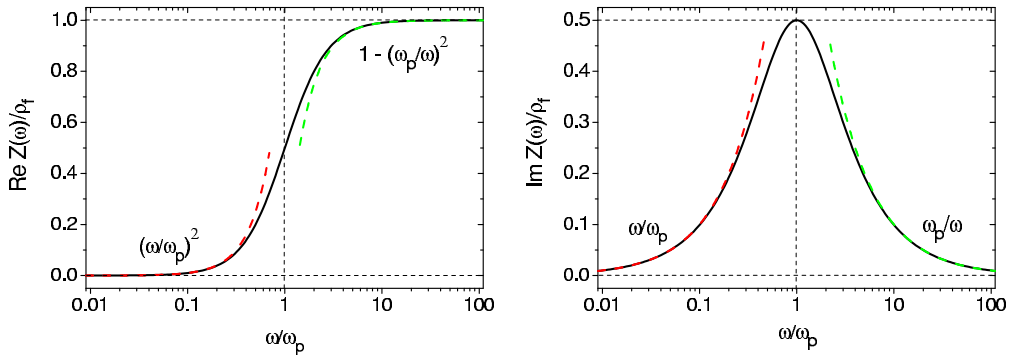


Рис. 10.1. Частотные зависимости (а) реальной и (б) мнимой частей импеданса.

$(1/2)\text{Re}(EJ_1^*)$, где E и J_1 есть комплексные амплитуды переменного электрического поля и плотности тока соответственно. Тогда из соотношения (10.3) следует

$$\mathcal{P}(\omega) = (1/2)\text{Re}Z(\omega)j_1^2 = (1/2)\rho_f j_1^2/[1 + (\omega_p/\omega)^2]. \quad (10.4)$$

Здесь уместно проанализировать частотные зависимости реальной и мнимой частей импеданса $Z = \text{Re}Z + i\text{Im}Z$, где

$$\begin{aligned} \text{Re}Z(\omega) &= \rho_f/[1 + (\omega_p/\omega)^2], \\ \text{Im}Z(\omega) &= \rho_f(\omega/\omega_p)/[1 + (\omega/\omega_p)^2]. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Графики этих зависимостей (в безразмерных единицах Z/ρ_f и ω/ω_p) представлены на рис. 10.1. Тогда из формул (10.1), (10.2) и (10.4) следует, что силы пиннинга доминируют при низких частотах ($\omega \ll \omega_p$), где $Z(\omega)$ слабо диссипативно, тогда как на высоких частотах ($\omega \gg \omega_p$) доминируют вязкие силы и $Z(\omega)$ является сильно диссипативным с $\text{Re}Z(\omega) \approx \rho_f[1 - (\omega_p/\omega)]$. Иными словами, в силу уменьшения амплитуды смещения вихря с ростом частоты переменного тока [$x \sim 1/\omega$ для $\omega \gg \omega_p$, см. формулу(10.2)], что сопровождается, однако, независимостью скорости вихря от ω в этом режиме [см. формулу (10.3)], можно считать, что вихрь фактически не реагирует на силу пиннинга. Вследствие этого его импеданс становится активным, что позволяет измерить ρ_f на переменном токе малой амплитуды, т. е. без пропускания через образец постоянного надкритического тока, приводящего часто к большой диссипации.

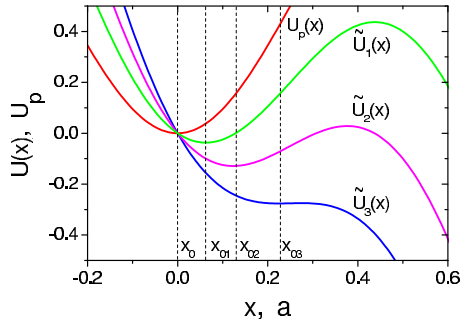


Рис. 10.2. Модификация потенциала пиннинга в присутствии постоянного тока.

10.2 Влияние постоянного тока на частоту депиннинга

Обобщим рассмотренную в предыдущем пункте GR модель с тем, чтобы учесть влияние постоянного транспортного субкритического тока (с плотностью $j_0 < j_c$, где j_c – плотность критического тока в отсутствие микроволнового облучения) на характеристики эффективного потенциала пиннинга вихря $\tilde{U}(x) \equiv U_p(x) - x f_0$, где $U_p(x)$ есть зависимость потенциала пиннинга от координаты вихря x в отсутствие субкритического тока, а $f_0 < f_c$, где f_0 и f_c есть величины силы Лоренца, соответствующие плотности транспортного тока j_0 и j_c .

Уравнение движения для вихря, который движется со скоростью $v(t)$ вдоль оси x во внешнем магнитном поле, величина которого B , есть

$$\eta v(t) = f(t) + f_p, \quad (10.6)$$

где $f(t) = (\Phi_0/c)j(t)$ есть сила Лоренца, а $j(t) = j_0 + j_1(t)$, где $j_1(t) = j_1 \exp(i\omega t)$, а j_1 есть амплитуда плотности малого переменного тока, Φ_0 – квант магнитного потока, c – скорость света. Ввиду того, что $f(t) = f_0 + f_1(t)$, где $f_0 = (\Phi_0/c)j_0$ и $f_1(t) = (\Phi_0/c)j_1(t)$ есть силы Лоренца на постоянном субкритическом и на малом переменном токе соответственно, то естественно считать, что $v(t) = v_0 + v_1(t)$, где v_0 не зависит от времени, а $v_1(t) = v_1 \exp(i\omega t)$. Сила пиннинга в уравнении (10.6) есть $f_p = -dU_p(x)/dx$, где $U_p(x)$ есть периодический потенциал пиннинга, который пока будем считать произвольным. Нашей целью является определение $v(t)$

из уравнения (10.6), которое с учетом сказанного выше приобретает вид

$$\eta[v_0 + v_1(t)] = f_0 + f_p + f_1(t), \quad (10.7)$$

Рассмотрим сначала случай, когда $j_1 = 0$. Если $j_0 < j_c$, т. е. $f_0 < f_c$, где f_0 есть максимальное значение силы пиннинга, то $v_0 = 0$, т. е. вихрь покоится. Как видно из рис. 10.2, координата покоя вихря x_0 в этом случае зависит от величины f_0 и определяется из условия равенства нулю эффективной силы пиннинга $\tilde{f}(x) = -d\tilde{U}(x)/dx = f_p(x) + f_0$, что сводится к решению уравнения $f_p(x_0) + f_0 = 0$, или уравнения

$$f_0 = \frac{dU_p(x)}{dx} \Big|_{x=x_0}, \quad (10.8)$$

решением которого есть функция $x_0(f_0)$. Перейдем теперь к рассмотрению малых колебаний вихря в окрестности точки равновесия x_0 под действием малой переменной внешней силы $f_1(t)$ с частотой ω . Для этого разложим эффективную силу пиннинга $\tilde{f}(x)$ вблизи $x = x_0$ в ряд по малым смещениям $u \equiv x - x_0$, что дает

$$\tilde{f}(x - x_0) \simeq \tilde{f}(x_0) + \tilde{f}'(x_0)u + \dots \quad (10.9)$$

Тогда с учетом того, что $\tilde{f}(x_0) = 0$ и $\tilde{f}'(x_0) = U_p''(x_0)$, уравнение (10.7) имеет вид

$$\eta v_1 + \tilde{K}_p u = f_1, \quad (10.10)$$

где $\tilde{K}_p(x_0) = U_p''(x_0)$ есть эффективная константа, характеризующая возвращающую силу $\tilde{f}(u)$ при малых колебаниях вихря в потенциале $\tilde{U}(x)$ вблизи точки $x_0(f_0)$, а $v_1 = \dot{u} = i\omega u$. Уравнение (10.10) физически полностью эквивалентно уравнению (10.1) предыдущего пункта с тем единственным отличием, что частота депиннинга вихрей $\tilde{\omega}_p \equiv \tilde{K}_p/\eta$ теперь в силу уравнения (10.8) зависит от f_0 , т. е. от плотности транспортного тока j_0 . Итак, все результаты пункта 10.1 [см. формулы (10.2)–(10.5)] могут быть переписаны с учетом замены $x \rightarrow u$ и $\omega_p \rightarrow \tilde{\omega}_p$.

Пример. Вычислим зависимость \tilde{K}_p для конкретного потенциала пиннинга $U_p(x) = (U_p/2)(1 - \cos kx)$ с $k = 2\pi/a$. Для него $U_p' = f_c \sin kx$, где $f_c = U_p k/2$ есть максимальная (т. е. критическая) сила пиннинга. Тогда из формулы (10.8) следует, что $f_0 = f_c \sin kx_0$ и тогда $\tilde{K}_p(x_0) = U_p''(x_0) = kf_c \cos^2 kx_0 = kf_c \sqrt{1 - \sin^2(kx_0)} = kf_c \sqrt{1 - (f_0/f_c)^2}$. Окончательно, $\tilde{\omega}_p(j_0) = (kf_c/\eta) \sqrt{1 - (f_0/f_c)^2}$, где $kf_c/\eta = \omega_p$.

10.3 Восстановление потенциала пиннинга

В этом пункте мы покажем, что из экспериментальных данных о зависимости частоты депиннинга $\tilde{\omega}_p(j_0)$ как функции постоянного тока j_0 в интервале $0 < j_0 < j_c$ можно определить координатную зависимость потенциала пиннинга вихря $U_p(x)$. Физической предпосылкой возможности решения такой задачи является формула (10.8), дающая зависимость координаты покоя вихря x_0 с величиной действующей на него статической силы f_0 , возникающей за счет протекания постоянного транспортного тока j_0 . Из (10.8) следует, что изменяя f_0 от нуля до f_c мы фактически “диагностируем” все точки зависимости $U_p(x)$. Дифференцируя формулу (10.8) по x_0 , мы получаем

$$dx_0/df_0 = 1/U_p''(x_0) = 1/\tilde{K}_p(x_0), \quad (10.11)$$

где использована связь [см. текст после формулы (10.10)] $U''(x_0) = \tilde{K}_p(x_0)$. Формулу (10.11) с учетом $x_0 = x_0(f_0)$ можно переписать как $dx_0/df_0 = 1/\tilde{K}_p[x_0(f_0)]$ и

$$\frac{dx_0}{df_0} = \frac{1}{\eta \tilde{\omega}_p(f_0)}. \quad (10.12)$$

Формула (10.12) позволяет, зная экспериментальную зависимость $\tilde{\omega}(f_0)$, получить зависимость $x_0(f_0)$ по формуле

$$x_0(f_0) = \int_0^{f_0} df/\eta \tilde{\omega}_p(f). \quad (10.13)$$

Имея $x_0(f_0)$, а значит и обратную функцию $f_0(x_0)$, и пользуясь связью $f_0(x_0) = U_p'(x_0)$, т. е. уравнением (10.8), получаем окончательно

$$U_p(x) = \int_0^x f_0(x_0) dx_0. \quad (10.14)$$

Итак, по экспериментальным данным $\tilde{\omega}(j_0)$ схема восстановления потенциала $U_p(x)$ кратко может быть сформулирована так:

1. По данным $\mathcal{P}[\omega/\tilde{\omega}(j_0)]$ найти $\tilde{\omega}_p(j_0)$.
2. Вычислить $x_0(f_0)$, взяв интеграл (10.13).
3. Имея $x_0(f_0)$, находим обратную функцию $f_0(x_0)$.
4. Интегрируя последнюю, находим $U_p(x)$ по формуле (10.14).

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем фундаментальное отличие динамики вихрей на постоянном и переменном токе?
2. Что такое частота депиннинга? Как она изменяется при пропускании через образец постоянного тока?
3. Как реконструировать координатную зависимость потенциала пиннинга из данных о поглощении мощности?

Алфавитный указатель

- Бардина-Купера-Шриффера
(БКШ) теория, 16
- антивихрь, 27
- барьер Бина-Ливингстона, 30
- вектор Пойнтинга, 97
- вихревая решетка, 57, 69, 75
- вихрь, 23
- волновое сопротивление, 98
- время релаксации, 92
- вязкость “пиннинговая”, 53
- гайдинг-эффект (направленное движение вихрей), 47, 81
- глубина проникновения, 13
- глубина скин-слоя, 94
- двухжидкостная модель, 15, 91
- диамагнетизм сверхпроводника, 22
- диссипация энергии, 31
- длина когерентности, 40
- длина свободного пробега, 91
- квант магнитного потока, 23
- комплексная проводимость, 91
- корреляционная длина, 16, 70
- корреляционный объем, 70, 76
- коэффициент вязкости, 31
- коэффициент теплопроводности, 14
- крип вихрей, 41, 72
- критерий Лабуша, 62, 65
- критическая температура, 12
- критический ток, 12, 39
- критическое поле, 12
- куперовская пара, 15
- локальная электродинамика, 17
- магнитный момент вихря, 24
- метастабильные конфигурации вихря, 73
- парамагнитный отклик вихрей, 22
- параметр порядка, 15, 23
- пик-эффект, 79
- пилообразный потенциал, 42
- пиннинг, 39
- пиннинг коллективный, 57
- пиннинг сильный, 57
- пиннинг собственный (intrinsic), 46
- поверхностное сопротивление, 97
- поверхностный импеданс, 99
- поверхностный ток, 96
- поле перегрева мейсснеровского состояния, 30

- потенциал пиннинга, 42
правило Сильсби, 13
решетка Абрикосова, 30
сверхпроводники второго рода, 13, 21
сверхпроводники первого рода, 13, 21
сила Лоренца, 30
сила коллективного пиннинга, 70
сила пиннинга, 40, 58, 77, 86
скин-эффект, 91
слиппинг-эффект (скольжение поперек протяженных дефектов), 47
статическая проводимость, 36
термоактивированного течения потока (режим), 45
течения потока (режим), 39, 83
ток распаривания, 16, 24, 68
угол Холла, 35
уравнение Лондонов, 92
фаза Шубникова, 22
фазовая диаграмма сверхпроводника, 22
фазовый переход первого рода, 67
центр пиннинга, 57
частота депиннинга, 104
частота циклотронная, 36
электронная теплоемкость, 14
энергетическая щель, 14
энергия ЭМ волны, 97
энергия активации крипа, 72
энергия вихря, 24
энергия деформации изгиба, 76
энергия деформации сдвига, 76
энергия кинетическая (сверхпроводящих токов), 25
энергия конденсации, 15, 19, 40
энергия магнитного поля, 19, 25
энергия пиннинга, 71, 76
энергия свободная, 17, 77
энергия упругая вихря, 71
эффект Мейсснера, 13, 26

Рекомендуемая литература

- [1] В. В. Шмидт. *Введение в физику сверхпроводников*. МЦНМО, Москва, 2000.
- [2] А. А. Абрикосов. *Основы теории металлов*. Наука, Москва, 1987.
- [3] M. Tinkham. *Introduction to Superconductivity*. Mineola, New York, 2004.
- [4] G. Blatter, M. V. Feigel'man, V. B. Geshkenbein, A. I. Larkin, and V. M. Vinokur. Vortices in high-temperature superconductors. *Rev. Mod. Phys.*, **66** (1994) 1125.
- [5] A. I. Larkin. Effect of inhomogeneities on the structure of the mixed state of superconductors. *Sov. Phys. JETP*, **31** (1970) 784.
- [6] D. N. Langenberg and A. I. Larkin, eds. *Nonequilibrium Superconductivity*, ch. 11 "Vortex motion in superconductors" by A. I. Larkin and Y. N. Ovchinnikov, pages 493–542. Elsevier, 1986.
- [7] A. I. Larkin and Yu. N. Ovchinnikov. Pinning in type II superconductors. *J. Low Temp. Phys.*, **34** (1979) 409.
- [8] G. Blatter, V. B. Geshkenbein, and J. A. G. Koopmann. Weak to strong pinning crossover. *Phys. Rev. Lett.*, **92** (2004) 067009.
- [9] A. M. Campbell and J. E. Evetts. Flux vortices and transport currents in type II superconductors. *Adv. Phys.*, **21** (1972) 199.
- [10] E. H. Brandt. The flux-line lattice in superconductors. *Rep. Progr. Phys.*, **58** (1995) 1465.
- [11] V. V. Moshchalkov, R. Wördenweber, and M. Lang, eds. *Nanoscience and Engineering in Superconductivity*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.

- [12] V. V. Moshchalkov and J. Fritzsche. *Nanostructured Superconductors*. World Scientific, Singapore, 2011.
- [13] H. Rogalla and P. H. Kes, eds. *100 Years of Superconductivity*. Taylor & Francis, 2011.
- [14] Л. Д. Ландау and Е. М. Лифшиц. *Электродинамика сплошных сред*. Москва, Наука, 1982.
- [15] V. A. Shklovskij and O. V. Dobrovolskiy. *Microwave Absorption by Vortices in Superconductors with a Washboard Pinning Potential*, ch. 11, pages 263–288. InTech, Rijeka, 2012.
- [16] W. K. Kwok, U. Welp, V. M. Vinokur, S. Fleshler, J. Downey, and G. W. Crabtree. Direct observation of intrinsic pinning by layered structure in single-crystal $\text{YBaCuO}_{7-\delta}$. *Phys. Rev. Lett.*, **67** (1991) 390.
- [17] G. Blatter, J. Rhyner, and V. M. Vinokur. Vortex pinning by twin boundaries in copper oxide superconductors. *Phys. Rev. B*, **43** (1991) 7826.
- [18] M. A. Obolenskii, A. V. Bondarenko, M. G. Revyakina, and V. A. Shklovskij. Critical current anisotropy at the vortices pinning on twins in $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ single crystals. *Supercond. Phys. Chem. Technol.*, **7** (1994) 43.
- [19] V. A. Shklovskij. Nonlinear flux creep resistivity and anisotropy of transport critical current in YBaCuO single crystals with unidirected twins. *Physica C*, **235–240** (1994) 3051.
- [20] J. I. Gittleman and B. Rosenblum. Radio-frequency resistance in the mixed state for subcritical currents. *Phys. Rev. Lett.*, **16** (1966) 734.

Учебное издание

Шкловский Валерий Александрович
Добровольский Александр Вячеславович

**ПИННИНГ И ДИНАМИКА ВИХРЕЙ
В СВЕРХПРОВОДНИКАХ**

Учебное пособие

Корректор *Х. Х. Хxxxxxxxxx*
Компьютерная верстка *А. В. Добровольский*
Макет обложки *А. В. Добровольский*

Подп. к печати *хх.хх.14*. Формат 60х84/16.
Усл. печ. лист. 6,74. Тираж 200 экз. Зак. № *хх/хх*.

Издатель и изготовитель
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,
61077, г. Харьков, пл. Свободы, 4.
Свидетельство субъекта издательского дела ДК № 3367 от 13.01.2009

Издательство ХНУ имени В. Н. Каразина
Тел. 705-24-32

